

X 454

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин,
акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров
(зам. главного редактора), акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор),
акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов,
акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

28-й ГОД ИЗДАНИЯ

1960

Том 132

МАЙ — ИЮНЬ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Digitized by the Internet Archive
in 2023

ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора), акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

28-й ГОД ИЗДАНИЯ

1960

ТОМ 132, № 1

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр

Ю. М. Березанский. Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа	9
В. С. Буслаев и Л. Д. Фаддеев. О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма — Лиувилля	13
В. С. Виноградов. Об одном методе решения задачи Пуанкаре для аналитических функций	17
Л. Р. Волевич. Об общих системах дифференциальных уравнений	20
В. В. Гольдберг. Сопряженные сети с параболическими конгруэнциями осей	24
М. Б. Капилевич. О формулах связи для сингулярных задач Трикоми	28
А. Г. Костюченко. Оценка резольвент сингулярных эллиптических операторов	32
С. Н. Кружков. О задаче Коши в целом для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка	36
Л. П. Нижник. Задача рассеивания при нестационарном возмущении	40
Л. В. Овсянников. Об отыскании группы линейного дифференциального уравнения второго порядка	44
И. В. Островский. О связи роста мероморфной функции с распределением ее значений по аргументам	48
Г. Н. Тюрин. О когомологиях комплексных однородных многообразий	52
В. Я. Урм. Некоторые замечания об асимптотическом поведении решений разностных уравнений	56
С. В. Успенский. Свойства классов W_p^r с дробной производной на дифференцируемых многообразиях	60
М. В. Федорюк. Асимптотика функции Грина задачи Коши для корректных по Петровскому систем с двумя переменными при $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow \infty$	63
А. А. Шаршанов. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с явной периодической зависимостью от аргумента	67
И. Ф. Шарыгин. О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций	71
В. А. Щельнов. О многозначных линейных операторах в локально выпуклом пространстве	75

- С. В. Яблонский, А. М. Гильман, И. В. Котельников и П. М. Потылицын. Устройство для исследования алгоритмов регулирования уличного движения 78

МЕХАНИКА

- И. И. Артоболевский. Об одном классе шатунных кривых 82

АСТРОНОМИЯ

- В. В. Виткевич, А. Д. Кузьмин, Р. Л. Сороченко и В. А. Удадьцов. Радио-астрономические наблюдения второй советской космической ракеты . . 85
А. А. Никитин. Об одной-возможной оценке температур горячих звезд по характеру эмиссионного спектра N III 89

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Н. Н. Говорун. О единственности решения интегральных уравнений теории антенн (первого рода) 91
А. С. Кронрод. О численном решении уравнения магнитного поля в железе с учетом насыщения 95

ФИЗИКА

- Е. Ф. Гросс и А. А. Каплянский. Оптическая анизотропия кубических кристаллов, вызванная явлением пространственной дисперсии. Квадрупольное экситонное поглощение света в закиси меди 98
В. В. Ключин. Влияние нейтронного облучения на кривую намагничивания монокристаллов кремнистого железа 102

ГЕОФИЗИКА

- И. М. Имянитов и Е. В. Чубарина. Структура электростатического поля в свободной атмосфере по данным исследований во время Международного геофизического года 104

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- В. Л. Калихман и Я. С. Уманский. Изучение начальных стадий возникновения диффузионной пористости в сплавах Л62 и Н80Х20 методом малоуглового рассеяния рентгеновских лучей 108

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

- Г. Г. Дворянкина и З. Г. Пинскер. Электронографическое исследование Fe_3O_4 110

ХИМИЯ

- А. К. Арен, О. Я. Нейланд и Г. Я. Ванаг. О структуре 2-п-нитрофенилдиндиона-1,3 115
О. Н. Качинская, С. Х. Тогоева, А. П. Мещеряков и С. М. Скуратов. Теплоты сгорания 1,1-диметил-2-алкилциклопропанов 119
И. Л. Кнулянци, Э. Г. Быховская, В. Н. Фросин и Я. М. Кисель. Взаимодействие фторолефинов с фтористым нитрозилом 123
И. К. Коробицына и К. К. Пивницкий. Новый метод синтеза 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5 127
А. Л. Либерман, Т. В. Васина и Б. А. Казанский. О пространственной конфигурации стереоизомерных 1,4-диизопропилциклогексанов 130
К. Н. Мочалов и Г. Г. Гильманшин. Полярографическое поведение борогидридов натрия, калия и лития 134
А. С. Онищенко и Н. И. Аронова. Цис- и транс-1-галоидбутadiены и их отношение к диеновому синтезу 138
И. Я. Постовский, Н. Ф. Казаринова, Г. Б. Афанасьева и Н. И. Латош. Новые эфиры дитиокарбаминовых кислот 141
П. И. Санин, М. Г. Воронков, Е. С. Шепелева и Б. И. Ионин. Взаимодействие диалкилфосфористых кислот с хинонами 145
Р. Х. Фрейдлина Цао И. и Е. Ц. Чуковская. Взаимодействие гидросиланов с акрилонитрилом в присутствии пентакарбонила железа и хлористого никеля 149
М. Ф. Шостаковский, Е. П. Грачева и Л. А. Каютенко. Синтез и превращения триалкилсилилэтинилвинилалкиловых эфиров 153

Ю. М. Бакиш, А. И. Гельбштейн и М. И. Темкин. Дополнительные данные по равновесию синтеза этилового спирта	157
Н. Н. Сирота, Н. М. Олехнович и А. У. Шелег. Об определении распределения электронно-плотности в кристаллах	160
Г. И. Фукс. О механизмах действия нейтральных электролитов на связь частиц в коагуляционной структуре	164

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Г. В. Куколев и М. Т. Мельник. Влияние добавок Cr_2O_3 , P_2O_5 , V_2O_5 , BaO на микроструктуру портландцементного клинкера	168
---	-----

ГЕОЛОГИЯ

Г. Л. Бельговский и Л. А. Эктова. Новые данные о геологии палеозойских образований хребтов Саур, Сайкан, Манрак и Восточный Тарбагатай	172
Иг. В. Васильев. Отпечатки растений из неогеновых отложений Белоруссии	175
И. Д. Гофштейн и В. П. Костюк. Новые данные о составе пистынских конгломератов (Карпаты)	178

МИНЕРАЛОГИЯ

Д. П. Сердюченко и В. А. Молева. Титаниты из архейских пород Южной Якутии	181
---	-----

ПЕТРОГРАФИЯ

М. Н. Ильинская. Цеолитизация туфогенных песчаников березовской свиты	185
Б. К. Прошляков и Ю. М. Васильев. Петрографические особенности пермотриаса полуострова Бузачи	188

ГЕОХИМИЯ

Н. М. Караваев и Н. Ф. Будяк. Исследование так называемых гуминовых кислот пресноводных сапропелей	192
И. Е. Старик, Л. Я. Атрашенок и А. Я. Крылов. О радиоактивном равновесии в гранитах Центрального Тянь-Шаня	195

ЦИТОЛОГИЯ

Г. П. Георгиев и Ю. С. Ченцов. О структуре клеточного ядра. Экспериментальное электронномикроскопическое исследование изолированных ядер	199
--	-----

ГИСТОЛОГИЯ

В. Л. Боровягин. Электронномикроскопическое исследование ультраструктуры миелиновой оболочки периферического нерва лягушки в различных условиях фиксации объекта	203
--	-----

БИОФИЗИКА

А. В. Бурсиан. Влияние гамма-лучей на эмбриональный эритропоэз	206
Н. П. Дмитриева. Электронномикроскопическое исследование клеток опухоли Броуна — Пирс в ранних сроках после воздействия ультразвуком большой интенсивности	210

БИОХИМИЯ

А. А. Кузнецов и Б. Н. Степаненко. Изучение превращений дифосфата фруктозы, вводимого в организм животных	213
---	-----

БОТАНИКА

М. М. Ильин и Н. А. Трухалева. О расах <i>Trifolium lupinaster</i> L. s. l.	217
---	-----

ЭКОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

М. В. Колесниченко. Влияние выделений березы бородавчатой (<i>Betula verrucosa</i> Ehrh) на фотосинтез дуба черешчатого (<i>Quercus robur</i> L.)	220
---	-----

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. И. Словиковский. Значение минерализации и выщелачивания органического опада древесных и кустарниковых пород для питания растений	223
---	-----

ЗООЛОГИЯ

С. И. Малышев. Особенности поведения и развития арханческих наездников гастерупций (Hymenoptera, Gasteruptiidae)	227
Н. П. Тарнавский. О гибриде днепровского рыбка и густеры <i>Blicca bjoerkna</i> (L.) × <i>Vimba vimba vimba natio carinata</i> (Pall.)	231

И. С. Даревский. Уродства при партеногенетическом размножении у скальных ящериц <i>Lacerta saxicola</i> Eversmann	234
Я. Е. Хесин и К. С. Блинные. Изменение объема ядер клеток однослойных культур ткани почки обезьяны при заражении вирусом В	238

CONTENTS

MATHEMATICS

Pages

Iu. M. Berezanskii. Energy inequalities for some classes of mixed type equations	9
V. S. Bus'aev, L. D. Fadeev. Formulas for traces in the case of Sturm-Liouville's differential singular operator	13
V. S. Vinogradov. Concerning a method of solution of the Poincare problem for analytic functions	17
L. R. Vol'evich. General systems of differential equations	20
V. V. Gol'dberg. Conjugated nets with parabolic congruences of axes	24
M. B. Kapilevich. Connection formulas for singular Tricomi problems	28
A. G. Kostiuhenko. Evaluation of the resolvents of singular elliptic operators	32
S. N. Kruzhkov. Cauchy problem in the large for some non-linear first order differential equations	36
L. P. Nizhnik. Scattering problem for non-stationary perturbation	40
L. V. Ovsiannikov. Determination of the group of linear second order differential equation	44
I. V. Ostrovskii. Relationship between the growth of a meromorphic function and the distribution of its values over the arguments	48
G. N. Tiurina. Cohomologies of complex homogeneous manifolds	52
V. J. Urm. Some remarks on the asymptotic behaviour of solutions to difference equations	56
S. V. Uspenskii. Properties of W_p^r classes with a fractional derivative on differentiable manifolds	60
M. V. Fedoriuk. The asymptotic behaviour of Green's function in Cauchy's problem for systems correct according to Petrovsky and involving two variables $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow \infty$	63
A. A. Sharshanov. Systems of ordinary differential equations with an explicit periodical dependence on the argument	67
I. F. Siarygin. The use of number-theoretical methods of integration in the case of non-periodical functions	71
V. A. Shchel'nov. Many-valued linear operators in a locally convex space	75

CYBERNETICS AND THE REGULATION THEORY

S. V. Iablonskii, A. M. Gil'man, I. V. Kotel'nikov, P. M. Potylitsyn. A contrivance for the investigation of street traffic control algorithms	78
--	----

MECHANICS

I. I. Artobolevskii. A class of connecting-rod curves	82
---	----

ASTRONOMY

V. V. Vitkevich, A. D. Kuzmin, R. L. Sorochenko, V. A. Udal'tsov. Radioastronomic observations of the second Soviet space rocket	85
A. A. Nikitin. A possible estimate of the temperature of hot stars from the character of their N III emission spectrum	89

MATHEMATICAL PHYSICS

N. N. Govorun. Uniqueness of the solution to Fredholm's integral equations of the first kind in the theory of antennas	91
A. S. Kronrod. Numerical solution to the equation of magnetic field in iron with allowance for saturation	95

PHYSICS

E. F. Gross, A. A. Kaplianskii. Optical anisotropy of cubic crystals produced by dispersion in space. Quadrupole excitonic absorption of light in cuprous oxide	98
V. V. Kliushin. The effect of neutron bombardment on the magnetization curve of silicon iron single crystals	102

	<i>Pages</i>
GEOPHYSICS	
I. M. Imianitov, E. V. Chubarina. The structure of the electrostatic field in the free atmosphere from the evidence obtained during International Geophysical Year investigations	104
TECHNICAL PHYSICS	
V. L. Kalikhman, J. S. Umanskii. Initial stages in the formation of diffusion porosity in L62 and H80X20 alloys as investigated by the method of small-angle scattering of x-rays	108
CRYSTALLOGRAPHY	
G. G. Dvoriankina, Z. G. Pinsker. Electron diffraction pattern investigation of Fe_3O_4	110
CHEMISTRY	
A. K. Aren, O. J. Neiland, G. J. Vanag. On the structure of 2-para-nitrodiphenylindandione-1,3	115
O. N. Kachinskaia, S. Kh. Togoeva, A. P. Meshcheriakova, S. M. Skuratov. Combustion heats of 1,1-dimethyl-2-alkylcyclopropanes	119
I. L. Knunians, E. G. Bykhovskaia, V. N. Frosin, J. M. Kisel'. Interaction of fluorolefines with nitroaryl fluoride	123
I. K. Korobitsyna, K. K. Pivnitskii. A new method of synthesizing 2,2,6,6-tetraalkyltetrahydropyranones-3,5	127
A. L. Liberman, T. V. Vasina, B. A. Kazanskii. Space configuration of stereoisomeric 1,4-diisopropylcyclohexanes	130
K. N. Mochalov, G. G. Gil'manshin. Polarographic behaviour of sodium, potassium and lithium boronhydrides	134
A. S. Onishchenko, N. I. Aronova. Cis- and trans-1-halobutadienes and their relation to diene synthesis	138
I. J. Postovskii, N. F. Kazarinova, G. B. Afanasieva, N. I. Latosh. New ethers of dithiocarbamic acids	141
P. I. Sanin, M. G. Voronkov, E. S. Shepeleva, B. I. Ionin. Interaction between dialkylphosphorous acids and quinones	145
R. Kh. Freidlina, Tso I, E. Tz. Chukovskaia. Interaction of silicon hydrides with acrylonitril in the presence of iron pentacarbonyl and nickel chloride	149
M. F. Shostakovskii, E. P. Gracheva, L. A. Kaiutenko. Synthesis and transformations of trialkylsilyl ethinyl vinyl alkyl ethers	153
PHYSICAL CHEMISTRY	
Iu. M. Bakshi, A. I. Gel'bsteyn, M. I. Temkin. More data on the equilibrium of the ethyl alcohol synthesis	157
N. N. Sirota, N. M. Olekhovich, A. U. Sheleg. Determination of the electron density distribution in crystals	160
G. I. Fuks. The mechanisms underlying the effects of neutral electrolytes on the cohesion of particles in a coagulation structure	164
CHEMICAL TECHNOLOGY	
G. V. Kukolev, M. T. Mel'nik. The effect of Cr_2O_3 , P_2O_5 , V_2O_5 , BaO admixtures on the microstructure of portland cement clinker	168
GEOLOGY	
G. L. Bel'govskii, L. A. Ektova. Recent data on the geology of Paleozoic formations of Saur, Saykan, Manrak and Eastern Tarbagatay mountain ridges	172
Ig. B. Vasiliev. Reprints of plants from Neogene deposits of Byelorussia	175
I. D. Gofshtein, V. P. Kostiuk. Recent data on the composition of the Pistyn conglomerates (the Carpathians)	178
MINERALOGY	
D. P. Serdiuchenko, V. A. Moleva. Titanite from Archean rocks of South Yakutia	181
PETROGRAPHY	
M. N. Il'inskaia. Zeolitization of tuffaceous sandstones of the Berezovsk series	185
B. K. Proshliakov, Iu. M. Vasiliev. Petrographic characters of the Permian-Triassic of the Buzachi peninsula	188
GEOCHEMISTRY	
H. M. Karavaev, N. F. Budiak. An investigation of so-called humic acids from fresh water sapropels	192
I. E. Starik, L. J. Atrashenok, A. J. Krylov. On the radioactive equilibrium in the granites of the Central Tien Shan	195
CYTOLOGY	
G. P. Georgiev, Iu. S. Chentsov. The structure of cell nucleus (an experimental examination of isolated nuclei with the aid of an electron microscope)	199

- V. L. Boroviagin. The elektronomicroskopik examination of ultrastructures of the myelin sheath of a frog's peripheral nerve under different fixation conditions 203

BIOPHYSICS

- A. V. Bursian. The effect of γ -rays on embryonic erythropoiesis 206
N.P. Dmitrieva. Cells of Brown-Pierce's tumor examined with the help of electron microscope at early stages following ultrasonic treatment of high intensity 210

BIOCHEMISTRY

- A. A. Kuznetsov, B. N. Stepanenko. A study of transformations of fructose diphosphate introduced in the organism of animals 213

BOTANY

- M. M. Il'in, N. A. Trukhaleva. On the races of *Trifolium lupinaster* L. s. l. . . 217

PLANT ECOLOGY

- M. V. Kolesnichenko. The effect produced by the excreta of *Betula verrucosa* Ehrh on the photosynthesis in *Quercus robur* L. 220

PLANT PHYSIOLOGY

- V. I. Slovikovskii. The role of mineralization and lixiviation of organic slash of woody and shrubby plants for their nutrition 223

ZOOLOGY

- S. I. Malyshev. Some peculiar traits in the behaviour of Archaic Gasteruptionidae 227
N. P. Tarnavskii. On a hybrid between the Dnieper *Blicca bjoerkna* (L.) \times *Vimba vimba vimba natio carinata* (Pall.) 231

EXPERIMENTAL MORPHOLOGY

- Ii. S. Darevskii. Malformations occurring in the course of parthenogenetic reproduction in *Lacerta saxicola* Eversmann 234
J. E. Khesin, K. S. Blinnikov. Changes taking place in the volume of cell nuclei in one-layer culture of the kidney of an ape inoculated with «B» virus . . 238

ПОПРАВКИ

В нашей статье, помещенной в ДАН, т. 130, № 2, 1960 г. (А. В. Топчиев, Е. Н. Мушина, А. И. Перельман и Б. А. Кренцель, «Синтез поливинилциклогексана»), на стр. 344, стрска 13 снизу вместо напечатанного: т. кип. $83-85^{\circ}/15$ мм, следует читать: т. кип. $120^{\circ}/750$ мм.

А. В. Топчиев, Е. А. Мушина,
А. И. Перельман, Б. А. Кренцель

В нашей статье, помещенной в ДАН, т. 128, № 4, 1959 г. (И. Н. Плаксин и Р. Ш. Шафеев, «К вопросу количественной оценки закрепления ксантогената в зависимости от поверхностных свойств сульфидных минералов») на стр. 778

	Напечатано	Следует читать
строка 2	1,04 эв	0,4 эв
строка 4 снизу	$x=0,145$	$x=0,134$

И. Н. Плаксин, Р. Ш. Шафеев

Т-03081 Подписано к печати 21/IV-1960 г. Тираж 5125 экз. Зак. 243
Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. л. $7^{1/2}$. Печ. л. 20,55+6 вклеек. Уч.-изд. л. 21,6

2-я типография Издательства Академии наук СССР, Москва. Шубинский пер., 10

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 XII 1959)

Рис. 1

Теорема 1. Рассмотрим граничные условия (гр),

$$u|_{\Gamma_B \cup \Gamma_L \cup \Gamma_{\Pi} \cup \Gamma_{L, \Pi} \cup \dots \cup \Gamma_{N, \Pi}} = 0, \text{ и } u|_{\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{N, \Pi}} \text{ снято}$$

и сопряженные граничные условия $(\text{гр})^+$

$$v|_{\Gamma_B \cup \Gamma_L \cup \Gamma_P \cup \Gamma_{1, \Pi} \cup \dots \cup \Gamma_{N, \Pi}} = 0, \quad v|_{\Gamma_{1, \Lambda} \cup \dots \cup \Gamma_{N, \Lambda}} \text{ снято.}$$

Введем две положительные нормы:

$$\|u\|_+^2 = \int_G |u|^2 dx + \int_{G_2} \sum_{j, k=1}^2 a_{jk}(x) D_k u \overline{D_j u} dx + \int_{G_1} |V - k| D_1 u - D_2 u|^2 dx$$

и $\|v\|_{+,*}^2$, которая определяется так же, как $\|u\|_+^2$, только в интеграле по G_1 последний знак минус заменен на плюс.

Тогда справедливы энергетические неравенства

$$\|\mathcal{L}[u]\|_0 \geq c \|u\|_+, \quad \|\mathcal{L}[v]\|_0 \geq c \|v\|_{+,*}, \quad (u \in W_2^2(\text{гр}), v \in W_2^2(\text{гр})^+, c > 0); \quad (2)$$

$\|f\|_0$ — норма в $L_2(G)$; $W_2^2(\text{гр})$, $W_2^2(\text{гр})^+$ — совокупности функций из $W_2^2(G)$, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (гр) и $(\text{гр})^+$.

При этом предполагается, что коэффициент $k(x_2)$ дополнительно удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $2(k/k')' + 1 \geq \delta > 0$ ($x_2 \in [-h, 0]$); 2) коэффициент $k(x_2)$ трижды непрерывно дифференцируем на $[-h, 0]$, $k''(x_2)$ ограничена вблизи 0 и множество тех x_2 , где $2(k/k')' + 1 \leq 0$, состоит из конечного числа отрезков на $[-h, 0]$, причем на каждом таком отрезке $k''' \leq 0$ (или, более общо, $15k'^3 - 18kk'k'' + 4k^2k''' < 0$); 3) коэффициент $k(x_2)$ дважды непрерывно дифференцируем в $[-h, 0]$ и $k''(x_2)$ ограничена вблизи 0; тогда обязательно вблизи нуля $2(k/k')' + 1 \geq 0$, пусть $[-d, 0]$ — максимальный интервал, где это неравенство выполняется.

Утверждение теоремы справедливо, если $h > d$, но $h - d$ достаточно мало (малость $h - d$ зависит от k, ε и H ; $h - d$ можно оценить).

Напомним (см. (1)), что второе из неравенств (2) обеспечивает существование слабого решения краевой задачи

$$\mathcal{L}[u] = f, \quad u|_{\Gamma_B \cup \Gamma_L \cup \Gamma_P \cup \Gamma_{1, \Lambda} \cup \dots \cup \Gamma_{N, \Lambda}} = 0, \quad u|_{\Gamma_{1, \Pi} \cup \dots \cup \Gamma_{N, \Pi}} \text{ снято}, \quad (3)$$

т. е. существование такой функции $u \in L_2$, для которой при любом $v \in W_2^2(\text{гр})^+$ выполняется равенство $(u, \mathcal{L}[v])_0 = (f, v)_0$. Правая часть f является некоторой обобщенной функцией, именно элементом из пространства с отрицательной нормой, построенной по положительной норме $\|v\|_{+,*}$; во всяком случае, в качестве f может быть взята любая функция из L_2 . Первое из неравенств (2) обеспечивает единственность гладкого решения задачи (3).

Краевая задача для уравнения Чаплыгина $k(x_2) D_1^2 u + D_2^2 u = f$ исследовалась (в основном классическими методами) в работах (2-5), а также другими авторами (см. обзор (6)). Близкие к нашим рассмотрения имеются в (7, 8), однако даже для уравнения Чаплыгина характер ограничений и оценок (2) у нас отличен. Отметим, что условия 1) и 2) являются условиями соответственно Ф. И. Франкля (2) и Проттера (5), при которых ими доказана теорема единственности для уравнения Чаплыгина.

2°. Наметим вкратце доказательство первого из неравенств (2), второе доказывается аналогично. Обозначим $G_{1, \Gamma}$ область в полуплоскости $x_2 < 0$, ограниченную дугами AC_1 , γ_Γ , $\Gamma_{1, \Lambda}$ и $\Gamma_{1, \Pi}$. Для произвольной гладкой функции $u(x)$ ($x \in G_{1, \Gamma}$) справедливо равенство*

$$\begin{aligned} I_{G_{1, \Gamma}} &= 2\text{Re} \int_{G_{1, \Gamma}} \mathcal{L}[u] \{q\gamma (\overline{V - k} D_1 u - D_2 u) + \gamma u\} dx = \\ &= \int_{G_{1, \Gamma}} ((q\gamma)' - 2\gamma) |\overline{V - k} D_1 u - D_2 u|^2 dx + \int_{G_{1, \Gamma}} |u|^2 \gamma'' dx + I_{\Gamma_{1, \Gamma}}, \end{aligned}$$

* Интеграл, подобный интегралу $I_{G_{1, \Gamma}}$, рассматривался и Проттером (5).

$$\begin{aligned}
I_{\Gamma_{1,r}} = & 2 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_{1,r}} D_1 u D_2 \bar{u} (\sqrt{V - k v_2} - k v_1) q \gamma dx + \\
& + \int_{\Gamma_{1,r}} (-k |D_1 u|^2 + |D_2 u|^2) (-\sqrt{V - k} v_1 - v_2) q \gamma dx + \\
& + 2 \operatorname{Re} \int_{\Gamma_{1,r}} (k D_1 u \cdot v_1 + D_2 u \cdot v_2) \bar{u} \gamma dx - \int_{\Gamma_{1,r}} |u|^2 \gamma' v_2 dx, \quad (4)
\end{aligned}$$

$\Gamma_{1,r}$ — граница $G_{1,r}$; $v(x)$ — орт внешней нормали $q = -4k/k'$; $\gamma(x_2)$ — произвольная вещественная гладкая функция в $[-h, 0]$. Это равенство доказывается следующим образом: рассматриваем, например, интеграл $F = \int_{G_{1,r}} \mathcal{L}[u] q \gamma \sqrt{V - k} D_1 \bar{u} dx$ и перебрасываем интегрированием

частям \mathcal{L} на \bar{u} и D_1 на u , причем при переброске избегаем появления третьих производных. Справа получится слагаемое $-\bar{F}$, откуда находим $2 \operatorname{Re} F$. Аналогично поступаем с двумя другими интегралами.

Предположим, что функция γ в $[-h, 0]$ удовлетворяет требованиям

$$\gamma(0) < 0, \quad \gamma'(0) < \frac{2\varepsilon}{H} (-\gamma(0)), \quad \gamma'' \geq 0, \quad q\gamma' - \gamma \geq 0, \quad (q\gamma)' - 2\gamma \geq \delta > 0, \quad (5)$$

(х) — краевым условиям (гр). Исследуя в (4) знаки интегралов и отбрасывая неотрицательные члены, найдем

$$\Gamma_{1,r} \geq \delta \int_{G_{1,r}} |V - k D_1 u - D_2 u|^2 dx + 2\gamma(0) \operatorname{Re} \int_{AC_1} D_2 u \cdot \bar{u} dx - \gamma'(0) \int_{AC_1} |u|^2 dx. \quad (6)$$

Введем аналогичные интегралы $I_{G_{2,r}}, \dots, I_{G_{N,r}}$ и выпишем для них неравенства типа (6). Складывая эти неравенства, найдем оценку типа (6), в которой $G_{1,r}$ заменено на G_r , а AC_1 — на AB .

Рассмотрим эллиптическую подобласть G_3 . Интегрируя по частям с учетом $u|_{\Gamma_3} = 0$, а затем оценивая, найдем

$$0 \operatorname{Re} \int_{G_3} \mathcal{L}[u] u d\bar{x} \geq -2\gamma(0) \sum_{G_3} \int a_{jk} D_k u D_j \bar{u} dx - 2\gamma(0) \operatorname{Re} \int_{AB} D_2 u \cdot \bar{u} dx. \quad (7)$$

Складывая (6) (для I_{G_r}) и (7), получим $(\chi_E(x))$ — характеристическая функция E

$$\begin{aligned}
& 2 \operatorname{Re} \int_G \mathcal{L}[u] (\chi_{G_r} \{q\gamma (\sqrt{V - k} D_1 u - D_2 u) + \gamma u\} + \gamma(0) \chi_{G_3} \bar{u}) dx \geq \quad (8) \\
& - 2\gamma(0) \sum_{G_3} \int a_{jk} D_k u D_j \bar{u} dx + \delta \int_{G_r} |V - k D_1 u - D_2 u|^2 dx - \gamma'(0) \int_{AB} |u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Учитывая, что интеграл от квадрата модуля производной оценивается снизу интегралом от квадрата модуля функции плюс квадрат модуля функции в одном из концов дуги интегрирования, можно правую часть (8) оценить снизу выражением $\|u\|_+^2$. Так как левая часть, очевидно, оценивается сверху выражением $C \|\mathcal{L}[u]\|_0 \|u\|_+$, то в результате получим $\|\mathcal{L}[u]\|_0 \|u\|_+ \geq \eta \|u\|_+^2$, откуда после сокращения на $\|u\|_+$ приходим к первому из неравенств (2).

Итак, для завершения доказательства нам нужно суметь подобрать непрерывно дифференцируемую функцию $\gamma(x_2)$ ($x_2 \in [-h, 0]$), имеющую кусочно-непрерывную вторую производную (такая гладкость

достаточна для предыдущих выкладок) и удовлетворяющую неравенствам (5). Можно показать, что это во всех трех случаях, фигурирующих в формулировке теоремы, возможно сделать (в первом случае достаточно положить $\gamma(x_2) \equiv -1$). Этим заканчивается доказательство.

3°. Газодинамическая задача истечения сверхзвуковой струи из неограниченного сосуда приводит в плоском случае к рассмотрению краевой задачи для уравнения Чаплыгина в области G , эллиптическая часть которой неограничена. При перенесении доказательств пункта 2° на этот случай возникают, как это видно из (8), трудности, связанные с необходимостью оценки интеграла $\int_{G_3} (k|D_1 u|^2 + |D_2 u|^2) dx$ снизу через $\|u\|_0^2$, что

невозможно, так как \mathcal{L} необратим в неограниченной области G_3 . Однако \mathcal{L} можно обращать в G_3 , если в качестве нормы $\|u\|_0$ брать не норму $L_2(G)$, а норму L_2 с весом (ср. (9)). На этом пути можно доказать:

Теорема 2. Пусть G — неограниченная область, гиперболическая часть которой такая же, как и прежде, а эллиптическая ограничена двумя идущими на ∞ дугами $\Gamma_{в,л}$ и $\Gamma_{в,п}$ (см. рис. 1); \mathcal{L} — дифференциальное выражение Чаплыгина с непрерывным коэффициентом $k(x_2)$ ($-h \leq x_2 < \infty$), удовлетворяющим при $x_2 \leq 0$ прежним общим условиям и условию 1), а при $x_2 > 0$ — требованию $k(x_2) \geq 0$. Рассмотрим граничные условия теоремы 1, в которых положено $\Gamma_{в} = \Gamma_{в,л} \cup \Gamma_{в,п}$. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ фиксировано; введем нулевую и положительную нормы

$$\|v\|_0^2 = \int_G |v|^2 \frac{dx}{(1 + |x_2|)^{2-\varepsilon}},$$

$$\|v\|_{+,*}^2 = \|v\|_0^2 + \int_{G_3} (k|D_1 v|^2 + |D_2 v|^2) (1 + |x_2|)^\varepsilon dx + \int_{\Gamma_r} |\sqrt{V-k} D_1 v + D_2 v|^2 dx$$

Для финитных на ∞ функций v , локально входящих в W_2^2 и удовлетворяющих граничным условиям $(\text{гр})^+$, справедливо энергетическое неравенство $\|(1 + |x_2|)^2 \mathcal{L}[v]\|_0 \geq c \|v\|_{+,*}$, обеспечивающее существование слабого решения краевой задачи

$$\mathcal{L}[u] = f, \quad u \in (\text{гр}), \quad \int_G |u|^2 \frac{dx}{(1 + |x_2|)^{2+\varepsilon}} < \infty, \quad (9)$$

т. е. существование локально суммируемой с квадратом функции u , для которой сходится интеграл (9) и такой, что $(u, \mathcal{L}[v])_{L_2} = (f, v)_L$ для любой v указанного вида. В качестве f можно взять любую функцию для которой сходится $\int_G |f|^2 (1 + |x_2|)^{2-\varepsilon} dx$, или обобщенную функцию, получающуюся путем замыкания f по норме $\|f\|_{-,*} = \sup_v ((f, v)_{L_2} / \|v\|_{+,*})$.

Пусть в частности, $\Gamma_{в,л}$ и $\Gamma_{в,п}$ являются вертикальными полупрямыми, а $k(x_2) \equiv 1$, начиная с достаточно большого $x_2 > 0$. Тогда рассматриваемые краевые условия (9) корректны в том смысле, что справедлива теорема единственности для гладких решений: всякое решение уравнения $\mathcal{L}[u] = 0$, входящее локально в W_2^2 , удовлетворяющее краевым условиям (гр) и такое, что интеграл (9) сходится, является нулевым.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
25 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. М. Березанский, ДАН, **131**, № 3 (1960). ² Ф. И. Франкл, Изв. АН СССР, сер. матем., **9**, № 2 (1945). ³ К. И. Бабенко, Автореферат диссертации, Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 1952. ⁴ М. Н. Protter, Du Math. J., **21**, № 1 (1954). ⁵ М. Н. Protter, J. Rat. Mech. and Analysis, **4**, № 1 (1955). ⁶ А. В. Бицадзе, Тр. 3-го Всесоюз. матем. съезда, **3**, 1958. ⁷ C. S. Morawetz, Comm. Pure and Appl. Math., **11**, № 3 (1958). ⁸ К. О. Friedrichs, Comm. Pure and Appl. Math., **11**, № 3 (1958). ⁹ Л. Н. Прокопенко, Укр. матем. журн. (1960) — в печати.

В. С. БУСЛАЕВ и Л. Д. ФАДДЕЕВ

О ФОРМУЛАХ СЛЕДОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 I 1960)

И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан и Л. А. Дикий получили тождества для собственных значений регулярного оператора Штурма — Лиувилля (см. [1]). Их можно интерпретировать как выражения для регуляризованных спектральных следов целых степеней оператора посредством через оператор. Такая формулировка позволяет поставить подобную задачу и для оператора с непрерывным спектром. В настоящей работе получены соотношения, выражающие некоторые характеристики спектра оператора

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad y(0) = 0$$

через $q(x)$. Эти соотношения аналогичны тождествам для собственных значений. Способ вывода основан на изучении свойств знаменателя резольвенты. Он оказывается удобным также и в случае регулярного оператора.

1. Мы будем всюду предполагать, что *

$$\int_0^{\infty} x |q(x)| dx < \infty.$$

Спектр оператора L состоит из полуоси $[0, \infty]$ — непрерывный спектр — конечного числа отрицательных собственных значений $\lambda_l = -\kappa_l^2$ ($\kappa_l > 0$; $l = 1, 2, \dots, m$). В связи с оператором L часто рассматривается функция

$$M(s) = 1 + \int_0^{\infty} e^{isx} q(x) \varphi(x, s) dx = A(s) e^{i\eta(s)}$$

$$(s = \sigma + i\tau, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad -\infty < \sigma < \infty).$$

Функция $\eta(\sigma)$ — аргумент $M(\sigma)$ — так называемая предельная фаза.

Пусть R_λ — резольвента L . Значком нуля сверху будем отмечать оператор, соответствующий $q(x) \equiv 0$.

Теорема 1. Оператор $R_\lambda - R_\lambda^0$ имеет след** при $\arg \lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_l$ ($l = 1, 2, \dots, m$), $\text{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = -\frac{d}{d\lambda} \ln M(\sqrt{\lambda})$; $0 \leq \arg \sqrt{\lambda} \leq \pi$.

Следствие. $M(\sqrt{\lambda}) = \det(E + qR_\lambda^0)$.

* По поводу используемых нами обозначений и свойств оператора L см. [2].

** О понятии следа для абстрактных операторов см. [3].

При $q(x) \in L[0, \infty]$

$$\ln M(V\bar{\lambda}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta(V\bar{z})}{z - \bar{\lambda}} dz + \sum_{l=1}^m \ln \frac{\lambda - \lambda_l}{\lambda} \quad (\operatorname{Im} V\bar{\lambda} > 0);$$

отсюда

$$\operatorname{Sp}(R_\lambda - R_\lambda^0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) d \frac{1}{t - \lambda}, \quad (\alpha)$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \eta(V\bar{t}), & t > 0, \\ - \int_{-\infty}^t \sum_l \delta(z - \lambda_l) dz, & t < 0. \end{cases}$$

В связи с другой задачей формулы типа (α) рассматривались в работе И. М. Лифшица ⁽⁴⁾. Они были подробно исследованы для абстрактных операторов М. Г. Крейном ⁽⁵⁾. В нашем примере представляет интерес связь функции $\xi(t)$ с предельной фазой $\eta(k)$.

2. Вывод соотношений, подобных тождествам для собственных значений, использует следующие леммы:

Лемма 1. Если $q(x) \in L[0, \infty]$, то при $0 < \operatorname{Re} z < 1/2$

$$\frac{\pi}{2z} \sum_{l=1}^m x_l^{2z} = \sin \pi z \cdot L(z) - \cos \pi z \cdot H(z),$$

где

$$H(z) = \int_0^{\infty} k^{2z-1} \eta(k) dk, \quad L(z) = \int_0^{\infty} k^{2z-1} \ln A(k) dk.$$

Лемма 1 является следствием аналитических свойств функции $M(s)$ в верхней полуплоскости. Ее можно получить контурным интегрированием функции $\frac{d}{ds} M(s) \frac{1}{M(s)} s^{2z}$.

Лемма 2. Предположим, что существует при $x \geq 0$ непрерывная производная $q^{(n)}(x)$ ($n \geq 1$), причем $q^{(l)}(x)$ ($l = 0, \dots, n$) имеют конечные пределы (с необходимостью равные нулю) при $x \rightarrow \infty$. Тогда равномерно в верхней полуплоскости имеют место асимптотические формулы

$$M(s) \underset{|s| \rightarrow \infty}{=} 1 - \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{l+1}}{(2is)^{l+1}} V_l + o\left(\frac{1}{|s|^{n+1}}\right),$$

$$\ln M(s) \underset{|s| \rightarrow \infty}{=} - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^p}{(2is)^p} Q_p + o\left(\frac{1}{|s|^{n+1}}\right),$$

откуда на вещественной оси

$$\ln A(k) \underset{|k| \rightarrow \infty}{=} - \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^\mu}{(2k)^{2\mu}} Q_{2\mu} + o\left(\frac{1}{|k|^{n+1}}\right),$$

$$\eta(k) \underset{|k| \rightarrow \infty}{=} - \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^\mu}{(2k)^{2\mu+1}} Q_{2\mu+1} + o\left(\frac{1}{|k|^{n+1}}\right).$$

В этих формулах $V_l \equiv \lim_{\alpha \rightarrow \infty} V_l(\alpha)$, $V_l(\alpha)$ ($0 \leq \alpha$) подчинены рекуррентным соотношениям

$$V_0(\alpha) = - \int_0^\alpha q(z) dz,$$

$$V_l(\alpha) = q^{(l-1)}(0) + \sum_{m=0}^{l-1} C_{l-1}^m \int_0^\alpha dz V_m(z) q^{(l-m-1)}(z) \quad (l = 1, \dots, n+1),$$

$$Q_p = V_{p-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{j}{p} V_{p-j-1} Q_j.$$

Эту лемму можно доказать, представляя зависимость $\varphi(x, s)$ от s выражением для $M(s)$ через оператор преобразования и используя интегральное уравнение для оператора преобразования.

Асимптотические формулы для $\ln A(k)$ и $\eta(k)$ позволяют исследовать аналитическое продолжение $H(z)$ и $L(z)$ из полосы $0 < \operatorname{Re} z < 1/2$ вправо и помощи обычных приемов (см., например, (6)). При этом оказывается, что $H(z)$ имеет простые полюса в точках $1/2, 3/2, \dots$, а функция $L(z)$ имеет простые полюса в точках $1, 2, \dots$. Вычеты в полюсах непосредственно выражаются через Q_μ . Отсюда, как результат аналитического продолжения тождества леммы 1, следует

Теорема 2. В предположениях леммы 2 справедливы формулы

$$\begin{aligned} (-1)^\mu \sum_{l=1}^m x_l^{2\mu} + \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\infty k^{2\mu-1} \left[\eta(k) - \sum_{l=0}^{\mu-1} \frac{(-1)^{l+1}}{(2k)^{2l+1}} Q_{2l+1} \right] dk = \\ = (-1)^\mu \frac{\mu}{2^{2\mu}} Q_{2\mu} \quad \left(\mu = 1, 2, \dots \leq \frac{n}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^\mu \sum_{l=1}^m x_l^{2\mu+1} - \frac{2\mu+1}{\pi} \int_0^\infty k^{2\mu} \left[\ln A(k) - \sum_{l=1}^\mu \frac{(-1)^{l+1}}{(2k)^{2l}} Q_{2l} \right] dk = \\ = (-1)^\mu \frac{2\mu+1}{2^{2\mu+2}} Q_{2\mu+1} \quad \left(\mu = 0, \dots \leq \frac{n-1}{2} \right). \end{aligned}$$

Первая серия формул аналогична тождествам для собственных значений, вторая выражает те же соотношения, но в терминах функции $A(k)$.

При помощи леммы 2 находим

$$Q_1 = - \int_0^\infty q(z) dz, \quad Q_2 = q(0),$$

$$Q_3 = q'(0) + \int_0^\infty q^2(z) dz, \quad Q_4 = q''(0) - 2q^2(0).$$

Формулы первой серии при $\mu = 1, 2$ дают

$$- \sum_{l=1}^m x_l^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t \left[\eta(t) - \frac{1}{2t} \int_0^\infty q(z) dz \right] dt = - \frac{1}{4} q(0) \quad (\mu = 1).$$

Это соотношение уже было получено в работе одного из авторов (7).

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m x_l^4 + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty t^3 \left[\eta(t) - \frac{1}{2t} \int_0^\infty q(z) dz - \left(\frac{1}{2t} \right)^3 \left(q'(0) + \int_0^\infty q^2(z) dz \right) \right] dt = \\ = \frac{1}{8} (q''(0) - 2q^2(0)) \quad (\mu = 2). \end{aligned}$$

Сравнение наших результатов с результатами Л. А. Дикого для случая конечного промежутка обнаруживает полную аналогию*.

3. Сделаем некоторые замечания относительно случая конечного промежутка

$$ly \equiv -y'' + p(x)y, \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad y(0) = y(\pi) = 0; \quad r_\lambda = (l - \lambda)^{-1}.$$

Знаменатель резольвенты здесь можно связать с целой функцией $\omega(\lambda) \equiv \omega(\pi, \lambda)$, где

$$-\omega''(x, \lambda) + p(x)\omega(x, \lambda) = \lambda\omega(x, \lambda), \quad \omega(0, \lambda) = 0, \quad \omega'(0, \lambda) = 1.$$

Вне точек спектра

$$\text{Sp } r_\lambda = -\frac{d}{d\lambda} \ln \omega(\lambda).$$

Имеет место представление

$$\omega(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda} (\pi - t)}{\sqrt{\lambda}} p(t) \omega(t, \lambda) dt.$$

Его удобно использовать для изучения асимптотики $\omega(\lambda)$ и асимптотики собственных значений λ_l , определяемых нулями $\omega(\lambda)$.

Нетрудно доказать

$$\sum_{l=j+1}^{\infty} \lambda_l^s = \left[\frac{1}{\pi} p \int_{-\infty}^0 \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)} \omega(\lambda) \lambda^s d\lambda - i \sum_{l=1}^j \lambda_l^s \right] e^{-i\pi s} \sin \pi s;$$

λ_l , $l=1, \dots, j$, — отрицательные собственные значения; λ_l , $l=j+1, \dots$, — положительные собственные значения; $-1 < \text{Res} < -1/2$.

Аналитическое продолжение этой формулы приводит, как и выше, к тождествам для собственных значений.

Авторы выражают благодарность М. Г. Крейну и М. Ш. Бирману за обсуждение результатов работы.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. А. Дикий, УМН, 13, 3, 111 (1958). ² Л. Д. Фаддеев, УМН, 14, 4, 57 (1959). ³ R. Schatten, A Theory of Cross-Spaces, 1950. ⁴ И. М. Лифшиц, УМН, 7, 1, 171 (1952). ⁵ М. Г. Крейн, ДАН, 105, № 3, 433 (1955). ⁶ И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции и действия над ними, 1958. ⁷ Л. Д. Фаддеев, ДАН, 115, № 5, 878 (1957).

* Смотри формулы (6.3) и (6.4) работы (1). При сравнении надо учесть, что в (1) производные нечетного порядка $q'(x)$ считаются на концах промежутка равными нулю.

В. С. ВИНОГРАДОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 XII 1959)

Будем решать следующую краевую задачу: найти функцию $f(z)$, аналитическую в единичном круге $|z| < 1$, которая на его границе Γ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \{a(z)f'(z) + b(z)f(z)\} \Big|_{\Gamma} = c(z); \quad (1)$$

з), $b(z)$, $c(z)$ — функции, заданные на Γ , удовлетворяющие условию Гильберта с показателем ν ($0 < \nu \leq 1$), $|a(z)| \neq 0$.

Задача (1) была рассмотрена И. Н. Векуа⁽¹⁾ и ее решение было биевентным образом сведено к решению некоторого сингулярного интегрального уравнения.

Обозначим через $n = \frac{1}{2\pi} \Delta [\arg a(t)]$ индекс задачи (1) (целое число, равное отношению приращения функции $\arg a(t)$ при однократном обходе контура Γ против часовой стрелки к 2π). Тогда задачу (1) можно умножением на действительную функцию привести к виду

$$\operatorname{Re} \{z^n e^{p(z)} f'(z) + \gamma(z)f(z)\} \Big|_{\Gamma} = c_1(z). \quad (2)$$

Здесь $p(z)$ аналитична внутри единичного круга $|z| < 1$,

$$\operatorname{Im} p(z) \Big|_{\Gamma} = \arg \frac{a(z)}{z^n}, \quad \gamma(z) = b(z)e^{\operatorname{Re} p(z)}, \quad c_1(z) = c(z)e^{\operatorname{Re} p(z)}. \quad (3)$$

Будем считать, что разложение функции $\gamma(z)$ в ряд Фурье на единичной окружности содержит конечное число членов с отрицательными степенями, т. е.

$$\gamma(z) = \sum_{\mu=-m}^{\infty} \gamma_{\mu} e^{i\mu\varphi}, \quad \gamma_{-m} \neq 0. \quad (4)$$

Какому условию удовлетворяют, например, функции $\gamma(z)$, являющиеся полиномами конечной степени от x и y .

При выполнении данного условия (4) нашу задачу можно записать в форме

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z^k e^{p(z)} f'(z) + Q(z)f(z)}{z^l} \right\} = c_1(z) \quad (5)$$

при $k \geq 0$, $l \geq 0$; $Q(z)$ аналитична и $Q(0) \neq 0$ при $k > 0$.

Числа k , l и функция $Q(z)$ выражаются следующим образом через n и $\gamma(z)$:

1. $k = m + n$, $l = m$, $Q(z) = z^m \gamma(z)$ при $m \geq 0$ и $m \geq -n$.
2. $k = 0$, $l = -n$, $Q(z) = z^{-n} \gamma(z)$ при $m \geq 0$ и $m < -n$.
3. $k = n$, $l = 0$, $Q(z) = \gamma(z)$ при $m < 0$ и $n > 0$.
4. $k = 0$, $l = -n$, $Q(z) = z^{-n} \gamma(z)$ при $m < 0$ и $n \leq 0$.

Замечание 1. $k > 0$ и $Q(0) = 0$ могут осуществляться одновременно только в третьем случае.

Решая задачу (5) относительно аналитической функции $z^k e^{p(z)} f'(z) + Q(z) f(z)$, получим эквивалентное нашей задаче обыкновенное дифференциальное уравнение с особой точкой $z = 0$

$$z^k e^{p(z)} f'(z) + Q(z) f(z) = \frac{z^l}{2\pi} \int_{\Gamma} c_1(t) \frac{t+z}{t-z} ds + a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l - \bar{a}_{l-1} z^{l+1} - \dots - \bar{a}_0 z^{2l}; \quad (7)$$

a_0, a_1, \dots, a_{l-1} — произвольные комплексные числа, a_l — чисто мнимое число.

В случае $k = 0$ уравнение (7) не имеет особенностей, поэтому наша задача (1) всегда разрешима, а однородная задача имеет нетривиальное решение, зависящее от $2l + 3$ вещественных параметров.

При $k > 0$ преобразуем уравнение (7) к более удобной для нас форме. Для этого разделим обе части уравнения на $e^{p(z)}$ и сделаем подстановку

$$f(z) = f_1(z) \exp \left[- \int_0^z \Phi(t) dt \right], \text{ где } \Phi(z) \text{ определяется следующим образом.}$$

Пусть

$$e^{-p(z)} Q(z) = M_0 + M_1 z + \dots + M_k z^k + \dots;$$

тогда

$$\Phi(z) = M_k + M_{k+1} z + \dots + M_{k+\mu} z^\mu + \dots$$

Наше уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} z^k f_1'(z) + (M_0 + M_1 z + \dots + M_{k-1} z^{k-1}) f_1(z) = \\ = \exp \left[p(z) + \int_0^z \Phi(t) dt \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} c_1(t) \frac{t+z}{t-z} ds + a_0 + \dots + a_l z^l - \dots - \bar{a}_0 z^{2l} \right] = \\ = e^{F(z)} [P(z) + S_{2l}(z)]. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае $k = 1$ уравнение

$$z f_1'(z) + M_0 f_1(z) = e^{F(z)} [P(z) + S_{2l}(z)] \quad (9)$$

имеет единственное регулярное решение, если $M_0 \neq -n$, где n — натуральное число.

В случае $M_0 = -n$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^{F(z)} [P(z) + (a_0 + a_1 z + \dots + a_{l-1} z^{l-1} + \\ + a_l z^l - \bar{a}_{l-1} z^{l+1} - \dots - \bar{a}_0 z^{2l})] \frac{dz}{z^{n+1}} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Это условие представляет собой два действительных уравнения с $2l + 1$ неизвестными, а однородное уравнение (9) имеет нетривиальное решение.

Таким образом решение задачи (1) приведено к решению системы (10) и уравнения (9).

В случае $k > 1$, $M_0 \neq 0$ для разрешимости уравнения (8) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{P(z) + (a_0 + \dots + a_l z^l - \dots - \bar{a}_0 z^{2l})}{z^{k-M_{k-1}}} \times \\ \times \exp \left[F(z) - \left(\frac{M_0}{k-1} \frac{1}{z^{k-1}} + \dots + \frac{M_{k-2}}{z} \right) \right] dz = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

— контур, состоящий из отрезка $z = re^{i\frac{2\pi j}{k-1}}$ ($0 \leq r \leq 1$), затем дуги $z = e^{i\varphi} \left(\frac{2\pi j}{k-1} \leq \varphi \leq \frac{2\pi(j+1)}{k-1} \right)$ и отрезка $z = re^{i\frac{2\pi(j+1)}{k-1}}$ ($0 \leq r \leq 1$), проходящего в обратном направлении.

При выполнении условий (11) дифференциальное уравнение (8) имеет единственное регулярное в круге $|z| < 1$ решение. Условия разрешимости (11) для уравнения (8) были даны Горном⁽²⁾.

Итак, в случае $k > 1$ вопрос о разрешимости задачи (1) сводится к вопросу разрешимости линейной системы (11). Линейная система (11) представляет собой $2(k-1)$ действительных уравнений с $2l+1$ неизвестными.

Если $M_0 = 0$, $k > 0$, то, согласно замечанию 1, имеет место случай 3 формул (6).

Пусть $q = \min\{n, -m\}$, $q > 0$; решая задачу (5), получим следующую задачу:

$$z^k e^{\rho(z)} f'(z) + Q(z) f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} c_1(t) \frac{t+z}{t-z} ds, \\ \int_{\Gamma} c_1(t) ds = 0, \dots, \int_{\Gamma} c_1(t) \frac{ds}{t^{q-1}} = 0. \quad (12)$$

Ввиду того, что первые q членов разложения в ряд Маклорена функции, стоящей в правой части уравнения, должны быть равны нулю, задача сводится к сокращению на z^q к одному из рассмотренных выше случаев плюс выполнение условий (12).

Итак, задача (1) разобрана до конца в случае, когда ряд Фурье для $\gamma(z)$ имеет конечное число членов с отрицательными степенями. Такого рода функции образуют всюду плотное множество в пространстве H_ν (функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем ν). Но из предыдущих рассуждений видно, что решения, вообще говоря, неустойчивы относительно изменения $\gamma(z)$, поэтому использовать указанный метод для решения задачи (1) как приближенный можно только в случае, если известно заранее, что задача (1) устойчива относительно изменения $\gamma(z)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
31 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Н. Векуа, Тр. Тбилисс. матем. инст., 11, 109 (1942). ² J. Horn, f. reine u. angew. Math., 120, 1 (1899).

Л. Р. ВОЛЕВИЧ

ОБ ОБЩИХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 31 XII 1959)

Хорошо известно, что свойства одного дифференциального уравнения в основном (за исключением так называемых вырожденных случаев) определяются его главной частью, т. е. членами уравнения, содержащими старшие производные. При изучении систем уравнений также иногда необходимо выделить главные члены системы. Однако в случае системы дифференциальных уравнений выделение главных членов системы не столь однозначно, как в случае одного уравнения, и можно по-разному определять «главную часть» системы. Заметим, что именно различными способам выделения главной части системы соответствуют различные определения эллиптичности (¹, ²) и гиперболичности (³, ⁴). В первой части настоящей работы мы укажем некоторый способ построения главной части системы и дадим определение характеристической формы для системы уравнений. Пользуясь свойствами характеристической формы, мы укажем эффективное определение эллиптичности, эквивалентное определению Дуглиса и Ниренберга (⁵).

Далее будут специально рассмотрены общие системы обыкновенных уравнений и будет указан способ сведения их к системам, у которых главная часть есть диагональная матрица. Это сведение даст нам возможность определить число произвольных постоянных в общем решении системы обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами и построить для этой системы фундаментальную систему решений.

1. Рассмотрим систему уравнений

$$F_i = \sum_{j=1}^m A_{ij}(x, D) u_j(x) = f_i(x), \quad i = 1, \dots, m; \quad (1)$$

$$A_{ij}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq \gamma_{ij}} a_{ij}^{(\alpha)}(x) D^\alpha, \quad (2)$$

где, как обычно, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_k = \partial / \partial x_k$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, причем $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа. Числа γ_{ij} называются порядками операторов A_{ij} .

Системе (1) мы будем ставить в соответствие матрицу порядков $\Gamma = (\gamma_{ij})$. Если $A_{ij} \equiv 0$, то мы будем считать, что $\gamma_{ij} = -\infty$. Положим $R_T = \gamma_{1i_1} + \dots + \gamma_{mi_{m_1}}$, где $T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$ — произвольная подстановка из m чисел.

Определение 1. Порядком системы (1) называется число R , равное максимуму чисел R_T по всем подстановкам T из m чисел.

Определение 2. Целые числа s_1, \dots, s_m , t_1, \dots, t_m образуют допустимый набор чисел для системы (1) (матрицы Γ), если вы-

длены условия $(^2)$:

$$\sum_{i=1}^m (s_i + t_i) = R; \quad (3)$$

$$s_i + t_j \geq \gamma_{ij}. \quad (4)$$

Основой для наших дальнейших рассмотрений будет следующая лемма:
Лемма 1. Для любой матрицы Γ , элементы которой либо целые отрицательные числа, либо равны $-\infty$, существует допустимый набор чисел.

Итак, пусть числа s_1, \dots, t_m образуют допустимый набор чисел для системы (1). Положим

$$A'_{ij}(x, D) = \sum_{|\alpha| = s_i + t_j} \alpha_{ij}^{(\alpha)}(x) D^\alpha. \quad (5)$$

Заметим, что $A'_{ij} \equiv 0$, если $s_i + t_j > \gamma_{ij}$.

Введем обозначения

$$A(x, D) = (A_{ij}(x, D)), \quad A'(x, D) = (A'_{ij}(x, D)). \quad (6)$$

Определение 3. Дифференциальный оператор $A'(x, D)$, задаваемый (3), (6), называется главной частью дифференциального оператора $A(x, D)$.

Если мы в операторах (6) заменим операторы D_1, \dots, D_n вещественными числами ξ_1, \dots, ξ_n , то получим матрицы с полиномиальными коэффициентами $A(x, \xi)$ и $A'(x, \xi)$. Пусть

$$\chi(x, \xi) = \det \| A'(x, \xi) \|, \quad (7)$$

$$L(x, \xi) = \det \| A(x, \xi) \|. \quad (8)$$

Определение 4. Многочлен $\chi(x, \xi)$ называется характеристической формой системы (1) в точке x .

В силу (5) $\chi(x, \xi)$ будет однородным многочленом степени R по ξ . В силу определения R многочлен $L(x, \xi)$ не будет содержать членов степени выше R . Обозначим через $l(x, \xi)$ сумму членов степени R полинома $L(x, \xi)$, т. е. главную часть определителя матрицы $A(x, \xi)$.

Лемма 2. При любых значениях ξ характеристическая форма $\chi(x, \xi)$ совпадает с $l(x, \xi)$.

Заметим, что лемма 2 позволяет вычислять характеристическую форму системы (1), не строя матрицы $A'(x, D)$.

Определение 5. Система (1) называется вырожденной в области G , если для любой точки $x \in G$ характеристическая форма (7) равна тождественно нулю.

Леммы 1 и 2 позволяют дать эффективное определение эллиптичности, эквивалентное определению Дуглиса и Ниренберга $(^2)$.

Определение 6. Невырожденная система (1) называется эллиптической в области G , если в любой точке $x \in D$ характеристическая форма $\chi(x, \xi)$ не равна нулю ни при каких значениях $\xi \neq 0$.

II. Мы теперь будем рассматривать системы обыкновенных уравнений вида (1), где $D = d/dx$. В случае обыкновенных уравнений можно ограничиться рассмотрением невырожденных систем. Основанием для такого ограничения может служить следующая теорема.

Теорема 1. Пусть система (1) определена на отрезке $[0, X]$ и коэффициенты $a_{ij}^{(\alpha)}(x)$ суть мероморфные функции x . Тогда либо существует система уравнений

$$G_i = \sum_{i=1}^m B_{ij}(x, L) u_j = g_i, \quad (1^a)$$

невырожденная во всех точках отрезка $[0, X]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, и эквивалентная системе* (1), либо система (1^a) эквивалентна такой системе дифференциальных (или, быть может, алгебраических) уравнений, у которой число уравнений меньше числа неизвестных функций.

Доказательство. В силу вырожденности системы найдутся мероморфные функции $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{k-1}(x)$ такие, что k -я строка ($k \leq n$) матрицы $A'(x, \xi)$ будет выражаться через предыдущие строки по формулам

$$A'_{kj}(x, \xi) = \sum_{r=1}^{k-1} \lambda_r(x) A'_{rj}(x, \xi) \xi^{s_k - s_r} \quad (s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n).$$

Заменим систему (1) эквивалентной ей системой уравнений

$$F'_i = F_i + \delta_i^k \sum_{r=1}^{k-1} \lambda_r(x) D^{s_k - s_r} F_r = 0. \quad (1')$$

Легко видеть, что $R' < R$, где R' — порядок системы (1'). Если система (1') невырождена или $F'_k \equiv 0$, то теорема доказана; если система (1') вырождена, то мы ее заменим системой (1''), и т. д. Теорема доказана.

Рассмотрим на отрезке $[0, X]$ невырожденную систему обыкновенных уравнений порядка R . В силу леммы 1 систему можно будет записать в виде

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x) D^{s_i + t_j} u_j(x) + \sum_{j=1}^m \sum_{r < s_i + t_j} a_{ij}^{(r)}(x) D^r u_j(x) = f_i(x), \quad (9)$$

где матрица $A' = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов при старших членах системы (9), невырождена.

Теорема 2. Пусть функции $a_{ij}, a_{ij}^{(r)}$ имеют непрерывные производные до порядка $s - s_i$ ($0 = s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n = s$). Тогда для любой точки x_0 отрезка $[0, X]$ найдется такое $\delta > 0$, что на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ невырожденная система (9) эквивалентна системе уравнений вида

$$G_i = D^{r_i} u_i + \sum_{j=1}^m \sum_{r < r_j} b_{ij}^{(r)}(x) D^r u_j = g_i, \quad (10)$$

где $r_i \geq 0, r_1 + r_2 + \dots + r_m = R$; $b_{ij}^{(r)}$ — непрерывные функции x на отрезке $[0, X]$.

Доказательство. В силу невырожденности матрицы $A'(x)$, гладкости $a_{ij}(x)$ и малости δ можно занумеровать неизвестные функции u_1, \dots, u_m таким образом, чтобы из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(x) \gamma_{ji} = \gamma_i$$

можно было последовательно исключать неизвестные $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ при $|x - x_0| < \delta$. Заменим систему (9) эквивалентной ей системой уравнений

$$F_1^{(1)} = a_{11}^{-1} F_1, \quad (9'')$$

$$F_k^{(1)} = F_k - a_{1k} a_{11}^{-1} D^{s_k - s_1} F_1, \quad k = 2, \dots, m.$$

* Система (1) эквивалентна системе (1a), если всякая вектор-функция $u(x)$ (компоненты u_i которой имеют на отрезке $[x_1, x_2]$ непрерывные производные до порядка γ_{ij} , удовлетворяющая при $x_1 \leq x \leq x_2$ одной из систем (1), (1a), обязана удовлетворять и другой. Числа x_1 и x_2 выбраны так, что на отрезке $[x_1, x_2]$ нет полюсов коэффициентов систем (1) и (1a).

системе (9') член $D^{s_1+t_1}u_1$ входит только в одно первое уравнение. Аналогично исключим из всех уравнений, кроме второго, члены $D^r u_2$, где $r \geq s_2 + t_2$. Продолжая исключение, мы приведем систему (9) к виду (10), где $r_i = s_i + t_i$, $i = 1, \dots, m$.

Теорема доказана.

Заметим, что заменаи вида

$$u_1 = y_1, \quad Du_1 = y_2, \dots, D^{r_1-1}u_1 = y_1, \quad u_2 = y_{r_1+1}, \dots, D^{r_m-1}u_m = y_R$$

система уравнений (10) приводится к нормальной системе уравнений первого порядка

$$Dy_i = \sum_{j=1}^R c_{ij}y_j. \quad (11)$$

Это сведение позволяет строить в окрестности каждой точки отрезка $[0, X]$ наборы из R решений системы (1), образующих фундаментальную систему. Используя теорему о единственности задачи Коши для систем (11), можно «склеить» фундаментальные системы решений, определенные в окрестности каждой точки отрезка $[0, X]$.

Таким образом может быть доказана теорема:

Теорема 3. Если система обыкновенных уравнений (1) невырождена на отрезке $[0, X]$ и коэффициенты a_{ij} , $a_{ij}^{(r)}$ имеют непрерывные производные до порядка $s_n - s_i + \rho$, где $\rho = \max_{k,l} (t_k - t_l)$, то на отрезке $[0, X]$ существует R решений системы (1), образующих фундаментальную систему.

Из теоремы 3 видно, что число произвольных постоянных в общем решении невырожденной системы равно ее порядку. Число произвольных постоянных в общем решении вырожденной системы определяется после приведения последней к невырожденному виду. Заметим, что число произвольных постоянных в общем решении системы уравнений с постоянными коэффициентами равно степени многочлена ^(5, 6).

Это объясняется тем, что систему уравнений с постоянными коэффициентами (1) можно привести к виду (10) и даже к треугольному виду, не меняя определителя системы (8). В случае вырожденных систем с переменными коэффициентами истинный порядок системы (число произвольных постоянных в общем решении), вообще говоря, не связан с порядком многочлена (8), и нетрудно привести как примеры систем, у которых он больше порядка $L(x, \xi)$, так и примеры, где он меньше.

Автор выражает глубокую благодарность К. И. Бабенко за внимание к данной работе.

Поступило
31 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Г. Петровский, Матем. сборн., 5, 3 (1939). ² A. Douglis, L. Nirenberg, Comm. on Pure and Appl. Math., 8, 503 (1955). ³ И. Г. Петровский, Матем. сборн., 2, 814 (1937). ⁴ J. Leray, Lectures on Hyperbolic Equations with Variable Coefficients, Princeton, 1952. ⁵ Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939. ⁶ Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2, М., 1954.

В. В. ГОЛЬДБЕРГ

СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ КОНГРУЭНЦИЯМИ ОСЕЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 XII 1959)

1. Линия пересечения касательных плоскостей двух первых преобразований Лапласа (A_1) и (A_2) сопряженной сети (A_0) называется первой осью, а прямая A_1A_2 , соединяющая эти преобразования, — второй осью сети (A_0). Свойства гиперболических конгруэнций осей сопряженной сети впервые изучил Слотник ⁽¹⁾, а затем к ним возвращались многие другие авторы. Сети с параболическими конгруэнциями осей изучал лишь Михайлеску ⁽²⁾.

В данной работе продолжается исследование сетей этого рода.

2. К каждой точке сопряженной сети присоединим проективный репер, образованный четырьмя аналитическими точками A_i : точкой сети A_0 , соответствующими ей точками A_1 и A_2 первых преобразований Лапласа сети (A_0) и произвольной точкой первой оси A_3 . Инфинитезимальные проективные перемещения репера определяются уравнениями $dA_i = \omega_i^k A_k$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$). При указанном выборе вершин

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_1^3 = a\omega^1, \quad \omega_2^3 = c\omega^2; \quad (1)$$

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0. \quad (2)$$

Дифференцируя уравнения (2) при помощи уравнений структуры проективного пространства $D\omega_i^k = [\omega_i^l \omega_l^k]$ и применяя лемму Картана, имеем

$$\omega_3^2 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \quad \omega_2^0 = \gamma_1\omega^1 - c\beta_1\omega^2, \quad (3)$$

$$\omega_1^0 = -a\beta\omega^1 + \gamma\omega^2, \quad \omega_3^1 = \beta_1\omega^1 + \alpha_1\omega^2.$$

Инвариантными формами, соответствующими точечным и тангенциальным инвариантам Дарбу сети (A_0) ⁽³⁾, являются формы

$$H = \gamma_1[\omega^1\omega^2], \quad \bar{H} = c\alpha[\omega^1\omega^2], \quad (4)$$

$$K = \gamma[\omega^1\omega^2], \quad \bar{K} = a\alpha_1[\omega^1\omega^2].$$

3. Уравнения асимптотических линий поверхностей (A_0), (A_1), (A_2) имеют вид

$$a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2 = 0, \quad a\alpha(\omega^1)^2 + \gamma(\omega^2)^2 = 0, \quad \gamma_1(\omega^1)^2 + c\alpha_1(\omega^2)^2 = 0. \quad (5)$$

Равенства

$$\gamma = c\alpha, \quad (6)$$

$$\gamma_1 = a\alpha_1 \quad (7)$$

являются соответственно условиями того, чтобы конгруэнции касательных (A_0A_1) и (A_0A_2) были конгруэнциями W . Касательная к линии $\omega^2 = 0$

поверхности (A_1) пересекает первую ось в точке $T = A_3 - \beta A_0$, а касательная к линии $\omega^1 = 0$ на поверхности (A_2) — в точке $P = A_3 - \beta_1 A_0$.
 точки $F_{1,2} = \lambda A_0 + A_3$, $\Phi_{1,2} = \mu A_1 + A_2$, где λ и μ — корни уравнений

$$\lambda^2 + (\beta + \beta_1)\lambda + \beta\beta_1 - \alpha\alpha_1 = 0, \quad (8)$$

$$a\gamma\mu^2 + ac(\beta - \beta_1) - c\gamma_1 = 0, \quad (9)$$

и фокусами первой и второй оси. Первая ось пересекает фокальные плоскости второй и вторая — фокальные плоскости первой соответственно в точках $C_{1,2} = \bar{\mu}A_1 + A_2$, $B_{1,2} = \bar{\lambda}A_0 + A_3$, где $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ определяются из уравнений

$$ac\bar{\lambda}^2 + ac(\beta + \beta_1)\bar{\lambda} + ac\beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0, \quad (10)$$

$$a\bar{\mu}^2 + (\beta - \beta_1)\bar{\mu} - \alpha_1 = 0. \quad (11)$$

Уравнения (8) и (10) показывают, что пары точек (F_1, F_2) и (B_1, B_2) принадлежат инволюции, определяемой двойной точкой A_0 и парой точек (P) . При выполнении условия (6) в силу (9) и (11) имеем, что пара точек (C_1, C_2) принадлежит инволюции, определяемой двойной точкой A_1 и парой точек (Φ_1, Φ_2) .

4. Одностороннее расслоение пары конгруэнций осей в направлении первых осей ко вторым ⁽⁴⁾ допускают сети R ($H = \bar{K}$, $K = \bar{H}$). Особое положение с произволом в 5 функций одного аргумента образуют гармонические изотермически сопряженные сети, т. е. такие изотермически сопряженные сети, для которых точки T и P совпадают.

Одностороннее расслоение пары конгруэнций осей в направлении вторых осей к первым допускают те и только те сети, для которых сумма кривизны инвариантов равна сумме тангенциальных. Этот класс сетей зависит от одной произвольной функции двух аргументов. Примерами таких сетей служат сети R и сети E ($H = \bar{H}$, $K = \bar{K}$).

Наконец, сети R , и только эти сети, допускают двустороннее расслоение пары конгруэнций осей.

5. Сети, для которых конгруэнция первых осей является параболической, определяются пфаффовыми уравнениями (1), (2), (3) и условием

$$(\beta - \beta_1)^2 + 4\alpha\alpha_1 = 0, \quad (12)$$

и с параболическими конгруэнциями вторых осей — теми же пфаффовыми уравнениями и условием

$$ac(\beta - \beta_1)^2 + 4\gamma\gamma_1 = 0. \quad (13)$$

Каждый из этих классов сетей зависит от одной произвольной функции двух аргументов. Для сетей первого класса точка $F = F_1 = F_2$ совпадает с точкой двойной инволюции, рассмотренной на первой оси, а для сетей второго класса второй двойной точкой этой инволюции служит точка $B = B_1 = B_2$.

Среди сетей с параболическими конгруэнциями первых осей с произволом в 6 функций одного аргумента выделяются сети, допускающие одностороннее расслоение пары конгруэнций осей в направлении от вторых к первым. Аналогичный результат имеет место для сетей с параболическими конгруэнциями вторых осей. Отыскание сетей с параболическими конгруэнциями либо первых, либо вторых осей, допускающих одностороннее расслоение от первых осей ко вторым, приводит к сетям R , для которых обе конгруэнции осей параболические. С произволом в 6 функций одного аргумента существуют сети с параболическими конгруэнциями либо первых, либо вторых осей, характеризующиеся условием (6). Для пер-

вых точка $C = C_1 = C_2$, а для вторых точка $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ становится второй двойной точкой инволюции, рассмотренной на второй оси.

6. Система уравнений (1), (2), (3) при условиях (12), (13) определяет с произволом в 6 функций одного аргумента сети, для которых обе конгруэнции осей параболические. Совместим вершину A_3 с фокусом F . Тогда $\beta_1 = -\beta$; $A_3 = F = B$; $\Phi = -\frac{c\beta}{\gamma}A_1 + A_2$; $C = -\frac{\beta}{\alpha}A_1 + A_2$. Легко видеть, что сложное отношение точек A_1, A_2, Φ, C равно отношению первого тангенциального инварианта ко второму точечному. Условия (12) и (13) дают

$$\gamma\gamma_1 = a\alpha\alpha_1, \quad (14)$$

т. е. произведение тангенциальных инвариантов Дарбу равно произведению точечных. Условие (14) в силу (5) означает также, что на поверхностях (A_1) и (A_2) соответствуют асимптотические линии (2) .

Асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (Φ) , касательные к которым описывают конгруэнции первых и вторых осей сети (A_0) , определяются соответственно уравнениями

$$\beta\omega^1 - \alpha_1\omega^2 = 0, \quad (15)$$

$$a\beta\omega^1 - \gamma\omega^2 = 0, \quad (15')$$

или, в силу (12) и (13), уравнениями

$$\alpha\omega^1 + \beta\omega^2 = 0, \quad (16)$$

$$\gamma_1\omega^1 + c\beta\omega^2 = 0. \quad (16')$$

Геометрическая характеристика сетей (15) и (16) такова: касательные к линиям вторых семейств этих сетей соответственно на поверхностях (A_1) и (A_2) проходят через точку A_3 , сложные отношения двух направлений, касательных к линиям фокальной сети на поверхности (A_1) , с двумя направлениями касательных к линиям сетей (15), (15') и (16), (16') соответственно равны отношениям вторых или первых точечных и тангенциальных инвариантов Дарбу сети (A_0) . Сопряженность направлений (15), (15') и (16), (16') на поверхности (A_1) есть необходимое и достаточное условие того, чтобы соответственно конгруэнция первых осей и конгруэнция вторых осей были параболическими.

7. Сети R с параболическими конгруэнциями осей определяются уравнениями (1), (2), (3), (6), (7), (12). Исследование этой системы показывает, что это либо сети Вильчинского, либо сети, для которых $H = \bar{H} = K = \bar{K}$ (2) .

Четные преобразования Лапласа (M_{2k}) сетей Вильчинского с параболическими конгруэнциями осей располагаются на первой оси сети, нечетные (M_{2k-1}) — на второй; считая, как и в п. 6, $F = A_3$, $\beta_1 = -\beta$ и производя соответствующую нормировку, получим

$$M_{2n} = nA_3 - \beta A_0, \quad M_{2n-1} = -n\beta A_1 + (n-1)\alpha A_2, \quad (17)$$

$$M_{-2n} = nA_3 + \beta A_0, \quad M_{-2n+1} = (1-n)\beta A_1 + n\alpha A_2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что

$$(A_0, A_3, M_{2n}M_{-2n}) = -1 \quad (n \geq 1); \quad (A_1A_2, M_{2n-1}M_{-2n+1}) = \frac{n^2}{(n-1)^2}; \quad (18)$$

$$(\Phi A_1, M_{2n+1}M_{-2n-1}) = -1 \quad (n > 1); \quad (\Phi A_2, M_{2n-1}M_{-2n-1}) = -1 \quad (n > 1).$$

Конгруэнции касательных фокальных сетей этой последовательности принадлежат линейным комплексам одного пучка, определяемого комплексами

$$p_{02} - \alpha p_{13} - \beta p_{23} = 0, \quad p_{01} + \beta p_{13} - \alpha_1 p_{23} = 0. \quad (19)$$

Два специальных комплекса этого пучка совпадают. Обе конгруэнции ей принадлежат всем комплексам этого пучка и потому совпадают, образуя линейную конгруэнцию, принадлежащую единственному специальному комплексу пучка. Пара директрис ее совпадает с прямой $A_3\Phi$. Лучи этой линейной конгруэнции распадаются на два подсемейства: лучи одного описывают первые оси-сети (A_0) , лучи другого — вторые. Так как сеть (R) — сеть R , то, в силу п. 4, эти два подсемейства лучей двусторонне осязаемы. Развертывающимися поверхностями первого семейства служат конусы с вершинами в A_3 и направляющими (15) на поверхности (A_0) , второго — конусы с вершинами в Φ и направляющими (15') на поверхности (A_0) . Направления (15) и (15') сопряжены на (A_0) . Касательные к линиям (15) описывают конгруэнцию $(A_0\Phi)$. Последовательность точек $\{M_{2k}\}$ сходится к точке A_3 , последовательность точек $\{M_{2k-1}\}$ — к точке Φ . В заключение выражаю благодарность проф. С. П. Финикову за замечания по работе.

Московский городской педагогический институт
им. В. П. Потемкина

Поступило
29 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. Slotnick, Am. J. Math., 53, № 1, 143 (1931). ² T. Mihăilescu, An. d. I. d. Mat. si fiz Acad. R. P. R. Fil. Cluj, 7, № 1, 15 (1956). ³ E. Cartan, An. d. Sci., 68, 41 (1944). ⁴ С. П. Фиников, Теория пар конгруэнций, М., 1956.

М. Б. КАПИЛЕВИЧ

О ФОРМУЛАХ СВЯЗИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ТРИКОМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 XII 1959)

Будем называть сингулярными проблемами Трикоми задачу отыскания в области D ($y > x > 0$) тех решений $u(x, y, \beta)$ и $\bar{u}(x, y, \beta)$ уравнения Эйлера — Пуассона

$$(y - x)u_{xy} + \beta(u_x - u_y) = 0 \quad (0 \leq a = 2\beta < 1), \quad (1)$$

которые непрерывны в D вместе со своими производными второго порядка и удовлетворяют вдоль полупрямых $y = x \geq 0$, $x = 0$, $y \geq 0$ соответственно условиям

$$u(x, x) = f(x), \quad u(0, y) = 0; \quad (2)$$

$$\bar{u}_\eta(x, x) = f(x), \quad \bar{u}(0, y) = 0; \quad \eta = -((y - x)/(2 - 2a))^{1-a}. \quad (3)$$

При этом $f(x)$ полагается дважды непрерывно дифференцируемой на полуоси $y = 0$, $x \geq 0$, причем $f(0) = 0$.

Теорема 1. При $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$, $\beta = \beta_2 - \beta_1$, $a = a_2 - a_1$, $\omega(x - y) = x - \xi$, $\kappa_1 \Gamma(\beta) \Gamma(1/2 - \beta_2) = 2^a \Gamma(1/2 - \beta_1)$ имеет место формула связи

$$u(x, y, \beta_2) = (y - x)^{1-\beta_1-\beta_2} \int_0^x K_1(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) u(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (4)$$

где $K_1 = \kappa_1 (y - \xi)^{a_1-1} (x - \xi)^{\beta-1} F(-\beta, \beta_2, \beta; \omega)$.

Теорема 2. Пусть $\beta_1 > \beta_2 \geq 0$, $\bar{\beta} = \beta_1 - \beta_2$, $\kappa_2 (1 - a_1)^{a_1} \Gamma(\bar{\beta}) \Gamma(1/2 + \beta_2) = (1 - a_2)^{a_2} \Gamma(1/2 + \beta_1)$. Тогда функции $\bar{u}(x, y, \beta_i)$ ($i = 1, 2$) связаны равенством

$$\bar{u}(x, y, \beta_2) = (y - x)^{\bar{\beta}} \int_0^x K_2(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) \bar{u}(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (5)$$

ядро которого $K_2 = \kappa_2 (x - \xi)^{\bar{\beta}-1} F(-\bar{\beta}, 1 - \beta_2, \bar{\beta}; \omega)$.

Теорема 3. Если $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, $\kappa_3 (1 - a_1)^{a_1} \Gamma(1/2 - \beta_2) \times \Gamma(\beta_1 + \beta_2) = 2^{a_2} \Gamma(1/2 + \beta_1)$, то $\bar{u}(x, y, \beta_1)$ преобразуется в $u(x, y, \beta_2)$ соотношением

$$u(x, y, \beta_2) = (y - x)^{\bar{\beta}} \int_0^x K_3(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) \bar{u}_\xi(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (6)$$

где $K_3 = \kappa_3 (x - \xi)^{\beta_1+\beta_2-1} F(1 - \beta_1 - \beta_2, \beta_2, \beta_1 + \beta_2; \omega)$.

Обратные связи дает решение интегрального уравнения (6):

$$\bar{u}(x, y, \beta_2) = (y - x)^{\beta_1} \int_0^x K_4(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) u(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (7)$$

раведливое при $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 < 1, 2^{a_1} \kappa_4 \Gamma(1/2 + \beta_2) \Gamma(1 - \beta_1 - \beta_2) = (1 - a_2)^{a_2} \Gamma(1/2 - \beta_1), K_4 = \kappa_4 (x - \xi)^{-\beta_1 - \beta_2} (y - \xi)^{-\beta_2} F(2 - a_1 - a_2, -\beta_1, -\beta_1 - \beta_2; \omega)$.

Сопоставим рассматриваемые проблемы Трикоми с решениями $z(x, y, \beta)$ $\bar{z}(x, y, \beta)$ двух сингулярных задач Гурса (1):

$$yz_{xy} + \alpha z_y + \beta z_x = 0 \quad (\alpha > 0, \beta \geq 0, (x, y) \in D); \quad (8)$$

$$z(0, y) = 0, \quad z(x, 0) = f(x); \quad \bar{z}(0, y) = 0, \quad \bar{z}_y(x, 0) = f(x), \quad (8a)$$

итая, как и прежде, $f(0) = 0, f(x) \subset L_2$.

Теорема 4. Полагая $\beta_2 > \beta_1 \geq 0, D_x = \partial/\partial x, y\bar{\omega} = \alpha(x - \xi), \Gamma(1 - \beta_2) = \mu_1 \Gamma(1 - a_2) \Gamma(1 + \beta)$, приходим к формуле преобразования:

$$u(x, y, \beta_2) = (y - x)^{-\beta_2} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta_1} e^{-\alpha x/y} \int_0^x Q_1 z(\xi, y, \beta_1) d\xi. \quad (9)$$

а этот раз ядро Q_1 сводится к конфлюэнтной гипергеометрической функции Humbert'a (2): $Q_1 = -\mu_1 \exp(\alpha \xi/y) D_\xi [(x - \xi)^\beta \Phi_1(\beta_2, 1 - \beta_2, 1 + \beta, \bar{\omega})]$. Когда $\beta_2 = \beta_1 = \beta$, а $\bar{Q}_1 = Q_1(x, y, \xi, \beta, \beta)$, формула (9) принимает вид

$$\left[\frac{\alpha(y-x)}{y}\right]^\beta u(x, y, \beta) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-a)} z(x, y, \beta) + e^{-\alpha x/y} \int_0^x \bar{Q}_1 z(\xi, y, \beta) d\xi.$$

Обращая связи (9), найдем для $\beta_2 > \beta_1 \geq 0, \mu_2 \Gamma(1 - \beta_1) \Gamma(1 + \beta) = \Gamma(1 - a_1)$

$$z(x, y, \beta_2) = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{-\beta_2} (y - x)^{1-\beta_1} \int_0^x Q_2 u(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (10)$$

е $Q_2 = -\mu_2 (y - \xi)^{a_1-1} D_\xi [(x - \xi)^\beta \Phi_1(\beta_2, \beta_1 - 1, 1 + \beta; \omega, -\bar{\omega})]$.

При равных значениях $\beta_2 = \beta_1 = \beta$ и $Q_2(x, y, \xi, \beta, \beta) = \bar{Q}_2$

$$\left[\frac{\alpha(y-x)}{y}\right]^{-\beta} z(x, y, \beta) = \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-\beta)} u(x, y, \beta) + (y-x)^{1-a} \int_0^x \bar{Q}_2 z(\xi, y, \beta) d\xi.$$

Теорема 5. Пусть $\bar{\beta}_1 < 1, \mu_3 \Gamma(1 + \beta_2) \Gamma^2(1 - \beta_1) = \alpha \Gamma(1 - a_1); (b, z) - \text{гамма-функция Эйлера (3). Тогда:}$

$$\bar{z}(x, y, \beta_2) = \int_0^x Q_3(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) u(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (11)$$

$$Q_3 = \mu_3 (y - \xi)^{a_1-1} D_\xi \int_\xi^x (y - t)^{1-\beta_1} (t - \xi)^{-\beta_1} \gamma\left[\beta_2, \frac{\alpha(x-t)}{y}\right] dt.$$

Аналогичному соотношению удовлетворяют и функции $\bar{z}(x, y, \beta_2), (x, y, \beta_1)$. Интересно сравнить также (1) с уравнением

$$yv_{yy} + \beta v_y - \alpha v_x = 0 \quad (\alpha > 0, (x, y) \in D).$$

Если для $v(x, y, \beta)$ выполняются первые из условий (8a), то, обозначая через $Q_4(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2)$ ($0 \leq \xi \leq x$) функцию

$$Q_4 = -\mu_4 (y - \xi)^{a_1-1} D_\xi \int_\xi^x (x - t)^{\beta_2-2} (y - t)^{1-\beta_1} (t - \xi)^{-\beta_1} \exp\left(-\frac{\alpha y}{x-t}\right) dt,$$

е $\mu_4 \Gamma^2(1 - \beta_1) \Gamma(1 - \beta_2) = \Gamma(1 - a_1)$, получим

$$v(x, y, \beta_2) = (\alpha y)^{1-\beta_2} \int_0^x Q_4(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) u(\xi, y, \beta_1) d\xi. \quad (12)$$

Аналогичный вид имеют формулы, связывающие v с \bar{u} , а также \bar{v} с $u(x, y, \beta_1)$. Наряду с (1) ранее (4) изучалось более общее сингулярное уравнение

$$(y-x)w_{xy} + \beta(w_x - w_y) - b^2(y-x)w = 0.$$

Для его решений $w(x, y, \beta)$, удовлетворяющих условиям (2), получаем, полагая $r = \sqrt{(x-t)(y-t)}$, $z^\nu \bar{I}_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(1+\nu) I_\nu(z)$:

$$w(x, y, \beta_2) = (y-x)^{1-a_2} \int_0^x R_1 u(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (13)$$

если $\beta_2 > \beta_1 \geq 0$, $\nu_1 \Gamma(\beta_2) \Gamma(1-\beta_1) \Gamma(1/2-\beta_2) = 2^a \Gamma(1/2-\beta_1)$, $R_1 = -\nu_1(y-\xi)^{a_1-1} D_\xi \times$
 $\times \int_{\xi}^x (x-t)^{\beta_2-1} (y-t)^{\beta} (t-\xi)^{-\beta_1} \bar{I}_{\beta_2-1}(2br) dt$. При построении таких же

соотношений для интегралов $\bar{w}(x, y, \beta)$, удовлетворяющих краевым данным (3), приходится, наоборот, принять $\beta_1 > \beta_2 \geq 0$, что дает, если считать $\nu_2(1-a_1)^{a_1} \Gamma(1-\beta_2) \Gamma(\beta_1) \Gamma(\beta_2+1/2) = (1-a_2)^{a_2} \Gamma(\beta_1+1/2)$:

$$\bar{w}(x, y, \beta_2) = \int_0^x R_2(x, y, \xi, \beta_1, \beta_2) \bar{u}(\xi, y, \beta_1) d\xi, \quad (14)$$

$$R_2 = -\nu_2 D_\xi \int_{\xi}^x (x-t)^{-\beta_2} (y-t)^{\beta} (t-\xi)^{\beta_1-1} \bar{I}_{-\beta_2}(2br) dt.$$

В то же время при неизменном значении параметра β

$$w(x, y, \beta) = u(x, y, \beta) + (y-x)^{1-a} \int_0^x R_1(x, y, \xi, \beta, \beta) u(\xi, y, \beta) d\xi,$$

$$\bar{w}(x, y, \beta) = \bar{u}(x, y, \beta) + \int_0^x R_2(x, y, \xi, \beta, \beta) \bar{u}(\xi, y, \beta) d\xi.$$

Эти формулы в результате замены u и \bar{u} функциями z и \bar{z} принимают вид

$$w(x, y, \beta_2) = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta_1} (y-x)^{1-a_2} \int_0^x R_3 D_\xi [e^{\alpha \bar{z}/y z}(\xi, y, \beta_1)] d\xi, \quad (15a)$$

$$\bar{w}(x, y, \beta_2) = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta_1} \int_0^x R_4 D_\xi [e^{\alpha \bar{z}/y \bar{z}}(\xi, y, \beta_1)] d\xi, \quad (15b)$$

причем для R_3 получаем интегральное представление

$$R_3 = \nu_3 \int_{\xi}^x (t-\xi)^{-\beta_1} r^{a_2-2} e^{-\alpha t/y} \bar{I}_{\beta_2-1}(2br) dt,$$

в котором $\nu_3 \Gamma(\beta_2) \Gamma(1-a_2) \Gamma(1-\beta_1) = \Gamma(1-\beta_2)$, а R_4 определяется из равенства $\alpha \cdot 2^{1-a_2} \Gamma(a_2) R_4 = -\beta_1(1-a_2)^{a_2} \Gamma(a_2-1) R_3(x, y, \xi, \beta_1, 1-\beta_2)$. После интегрирования по частям (15) порождают четыре соотношения, отвечающие условиям $\beta_1 > \beta_2 \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 > 1$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Аналогичную форму имеют равенства, преобразующие u и z в \bar{w} , а также \bar{u} и \bar{z} в w .

Если $f(x) \in L_\infty$, то, по аналогии с (1), для приведенных операторов преобразования можно построить разложения в бесконечные ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся в области D . А именно, введем обозначения $U_x^\beta = k_1 \rho^\beta \Phi_1(\beta, 1-\beta, 1+\beta, -\rho, -\delta_x)$, $\bar{U}_x^\beta = k_2 x^{1-a\rho\beta} \Phi_1(1-\beta, \beta, 2-\beta, -\rho, -\delta_x)$, где $\rho(y-x) = x$, $\delta_x = x D_x$, $k_1 \Gamma(1+\beta) \Gamma(1-a) = \Gamma(1-\beta)$, $k_2 2^{1-a} \Gamma(2-\beta) \Gamma(a) = (1-a)^a \Gamma(\beta)$.

Кроме того, рассмотрим обратные операторы $(U_x^\beta)^{-1} = k_3(y-x)^{1-\beta} \times$
 $[D_x [x^{1-\beta}(y-x)^{\alpha-1} \Phi_1(1-\beta, 1-\alpha, 2-\beta, -\rho, -\delta_x)], (\bar{U}_x^\beta)^{-1} = k_4(y-x)^\beta \times$
 $[D_x [x^\beta \gamma^*(\beta, \delta_x)], k_3(1-\beta) \Gamma^2(1-\beta) = \Gamma(1-\alpha), \sqrt{\pi}(1-\alpha)^\alpha k_4 = \Gamma(1/2+\beta)].$
 Тогда, используя символику работы (1), получим $u_2 = U_x^{\beta_2} (U_x^{\beta_1})^{-1} u_1;$
 $= \bar{U}_x^{\beta_2} (\bar{U}_x^{\beta_1})^{-1} \bar{u}_1; \quad u_2 = U_x^{\beta_2} Z_x^{1-\beta_1} \Delta z_1; \quad u_2 = U_x^{\beta_2} \Delta_x^{\beta_1} z_1; \quad z_2 = Z_x^{\beta_2} (U_x^{\beta_1})^{-1} u_1;$
 $= \Delta_x^{-\beta_2} (U_x^{\beta_1})^{-1} u_1; \quad v_2 = V_x^{\beta_2} (U_x^{\beta_1})^{-1} u_1; \quad v_2 = V_x^{\beta_2} (\bar{U}_x^{\beta_1})^{-1} \bar{u}_1.$ Заметим, что
 $u(x, y, 0) = u_x(x, y, 0) = z(x, y, 0) = f(x).$ Таким образом, приведенные
 выше равенства при $\beta_1 = 0$ или $\beta_2 = 0$ дают явные формулы решения
 соответствующих краевых задач или их обращение относительно началь-
 ных функций.

Так как $K_1 \geq 0$, то из (4) вытекает, что если $f'(x) > 0$, то с ростом
 параметра β $u(x, y, \beta)$ убывает. Выше связывались интегралы двух
 уравнений при неизменной начальной функции. Пусть теперь $f_2(x) = P(x)f_1(x),$
 где $P(x)$ — произвольная функция, интегрируемая на любом конечном
 интервале полуоси $y = 0, x \geq 0.$ В этом случае для соответствующих
 решений также имеют место формулы (11) — (15), но подынтегральные
 выражения ядер Q_3, Q_4, R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) получают дополнительно мно-
 житель $P(t).$ Примеры таких связей можно также построить, записав
 z, v, w в форме интегралов Дюамеля, содержащих разрывные решения
 тех же задач для $f_1(x) = 1.$ Не приводя других результатов, возникаю-
 щих при попарной комбинации решений $u_i, \bar{u}_i, v_i, \bar{v}_i, w_i, \bar{w}_i,$
 \bar{z}_i ($i = 1, 2$) при условии $f_2(x) = P(x)f_1(x),$ отметим только, что если
 $f_1(x) = (x-x_1)^{-k_1} \dots (x-x_n)^{-k_n},$ ядра Q_5 и R_i ($i = 1, \dots, 4$) представ-
 ляются в форме бесконечных рядов по гипергеометрическим функциям
 Lauricella (2). Когда $b = 0$, такие ряды обрываются на их первом члене,
 поэтому, например, $\Gamma(1+\beta) R_1 = \Gamma(\beta_2) \Gamma(1-\beta_1) v_1(y-\xi)^{\alpha_1-1} (y-x)^\beta P(x) \times$
 $[D_\xi [(x-\xi)^\beta F_D(\beta_2, \beta, k_1, \dots, k_n, 1+\beta, \omega, X_1, \dots, X_n)], (x-x_i) X_i = x-\xi.$

С другой стороны, при $P(x) = \exp(kx), b = 0$ R_1 выражается через
 инфлюэнтную гипергеометрическую функцию $\Phi_1.$ Подобные формулы
 преобразования могут быть в свою очередь обобщены на случай, когда две
 или большее число начальных функций $f_i(x)$ связаны произвольным
 наперед заданным соотношением. Ряд других обобщений дают произведе-
 ния найденных операторов преобразования. Так, например, чтобы
 решить интегральное уравнение (12) относительно $u(x, y, \beta_1)$ достаточно
 формуле (9) заменить $z(x, y, \beta)$ выражением (10) из работы (1), пере-
 одящим $z(x, y, \beta)$ в $v(x, y, \beta).$ Подставляя то же выражение в (15), мы
 свяжем $w(x, y, \beta)$ с $v(x, y, \beta).$

При помощи формул связи при подходящем выборе значений $f_i(x)$
 удается также вычислить ряд интегралов со специальными функциями.
 Например, если $f_1(x) = x^m(1-cx)^{-k}, f_2(x) = x^{m+kx} (m > 0, k < 1),$ то
 соответствующих соотношениях появятся выражения $* u_1 = M F_1(1+m,$
 $-\beta, k, 1+m+\beta, x/y, cx), u_2 = M \Phi_1(1+m, 1-\beta, 1+m+\beta, x/y, kx),$
 где $M \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1+m+\beta) = \Gamma(1-\beta) \Gamma(1+m) x^{m+\beta} y^{\beta-1} (y-x)^{1-\alpha}.$
 В частности, когда $k = 0, u_1$ и u_2 приводятся к гипергеометрическим
 функциям Гаусса, а при $f(x) = x^m(x_1-x)^{-k_1} \dots (x_n-x)^{-k_n}$ решения
 $u(x, y, \beta), \bar{u}(x, y, \beta)$ выражаются через функции Lauricella $F_D.$

Поступило
 28 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Б. Капилевич, ДАН, 130, № 3 (1960). ² P. Appell, J. Кампре
 e F é r i e t, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynomes d Hermite, Paris,
 1926. ³ A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, et F. Tricomi,
 Higher Transcendental Functions, 1, 2, N. Y., 1953. ⁴ М. Б. Капилевич, ДАН,
 130, № 1, 13 (1951).

* Аналогичные значения для z и v указаны в (1).

А. Г. КОСТЮЧЕНКО

ОЦЕНКА РЕЗОЛЬВЕНТ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 XII 1959)

В настоящей заметке даются оценки резольвент одного класса эллиптических операторов и с их помощью устанавливаются теоремы о полноте собственных и присоединенных функций этих операторов.

1°. Рассмотрим оператор L в пространстве N -мерных вектор-функций

$$L = (-1)^{m+1} \sum_{k_1+\dots+k_n=2m} A^{k_1\dots k_n}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + L_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + Q(x), \quad (\alpha)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $-\infty < x_k < \infty$, $k = 1, 2, \dots, n$; $A^{k_1\dots k_n}(x)$ — матрица $\|a_{ij}^{k_1\dots k_n}(x)\|$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Через $L_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ обозначен линейный дифференциальный оператор порядка $< 2m$; $Q(x)$ — оператор умножения на матрицу $Q(x)$.

Будем считать, что выполнены следующие условия:

а) Характеристические корни $\lambda_i(s, x)$ матрицы

$$(-1)^{m+1} \sum_{k_1+\dots+k_n=2m} A^{k_1\dots k_n}(x) (is_1)^{k_1}\dots(is_n)^{k_n}$$

при вещественных s и $|s|^2 = \sum_{k=1}^n s_k^2 = 1$ и любых $x \in R_n$ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_i(s, x) < -\delta$, где $\delta > 0$ и не зависит от s и x .

б) Матрица $Q(x) = \|q_{ij}(x)\|$ является симметрической и ее характеристические корни $\beta_k(x)$ таковы, что $\beta_k(x) \leq -g(x)$, а $g(x)$ удовлетворяет неравенству $g(x) \geq c|x|^\alpha + c_1$ при некоторых $c > 0$, $\alpha > 0$.

Отметим, что если матрицы $A^{k_1\dots k_n}(x)$ симметричны, то оператор L будет сильно эллиптическим.

Предположим далее, что элементы матриц $A^{k_1\dots k_n}(x)$ и $Q(x)$ имеют $2m$ непрерывных производных, причем все производные элементов матриц $A^{k_1\dots k_n}(x)$ ограничены во всем пространстве R_n , а k -я производная $q_{ij}^{(k)}(x)$ элемента $q_{ij}(x)$ матрицы $Q(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|q_{ij}(x)| \leq cg^{\frac{2m+k}{2m}}(x), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Будем изучать главную часть оператора L :

$$L_0 = (-1)^{m+1} \sum_{k_1+\dots+k_n=2m} A^{k_1\dots k_n}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + Q(x). \quad (2)$$

Теорема 1. Если оператор (2) удовлетворяет условиям а), б), а также неравенству (1), то существует такое число $\lambda_0 > 0$, что оператор

$(-\lambda_0 E)^{-1}$ является интегральным оператором, ядро которого $H(x, y)$ удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial^k H(x, y)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right| \leq \frac{B_\varepsilon e^{-c|x-y|}}{g^{\frac{2m-k-\varepsilon}{2m}}(x)}, \quad \sum_{j=1}^n k_j = k, \quad k = 0, \dots, 2m-1. \quad (3)$$

здесь ε — любое число > 0 ; $|x-y| \geq 1$; $c > 0$; B_ε — константа, зависящая от ε . В окрестности точки $x=y$ ядро $H(x, y)$ имеет особенность фундаментального решения.

Имеют место следующие простые леммы.

Лемма 1. Если $g(x) \geq c|x|^\alpha + c_1$, то существует целое число m такое, что оператор $(L_0 - \lambda_0 E)^{-m}$ будет оператором типа Гильберта — Шмидта.

Лемма 2. Если $|M(x)| \leq c g^{\frac{2m-k}{k}-\delta}(x)$ при некотором $\delta > 0$, то оператор $\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} (L_0 - \lambda_0 E)^{-1}$, $k_1 + \dots + k_n = k \leq 2m-1$, есть вполне непрерывный оператор.

2°. Теорема 1 и полученные на ее основе леммы позволяют сделать заключение о полноте собственных и присоединенных функций, используя известную теорему М. В. Келдыша (1).

Рассмотрим оператор

$$L = (-1)^{m+1} \sum_{k_1 + \dots + k_n = 2m} A^{k_1 \dots k_n}(x) + L'_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) + Q(x) = L_0 + L'_1,$$

который формально симметричный. Пусть коэффициенты оператора L'_1 , порядок которого $< 2m$, ограниченные функции во всем R_n .

Теорема 1'. Если коэффициенты оператора L'_1 ограничены во всем пространстве R_n , то существует такое число λ_0 , что $(L - \lambda_0 E)^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром $H_1(x, y)$, которое удовлетворяет неравенству (3).

Теорема 2. Пусть матрицы $A^{k_1 \dots k_n}(x)$ симметричны и выполнены условия а), б), а элементы матрицы $Q(x)$ удовлетворяют неравенству (4). Если для комплекснозначных коэффициентов $b_{ij,l}(x)$ оператора $B_l \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$

$$B_l \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = l} B^{m_1 \dots m_n}(x) \frac{\partial^l}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$$

и некотором $\delta > 0$ выполнены неравенства

$$|b_{ij,l}(x)| \leq c g^{\frac{2m-l}{2m}-\delta}(x), \quad l = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad (4)$$

то оператор

$$\bar{L} = (-1)^{m+1} \sum_{k_1 + \dots + k_n = 2m} A^{k_1 \dots k_n}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{l=0}^{2m-1} B_l \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) + Q(x)$$

имеет полную систему собственных и присоединенных функций.

Теорема 2 непосредственно следует из теоремы 1' и лемм пункта 1. В самом деле, оператор \bar{L} можно записать в виде

$$\bar{L} = (-1)^{m+1} \sum_{k_1 + \dots + k_n = 2m} A^{k_1 \dots k_n}(x) + L' \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \sum_{l=0}^{2m-1} B'_l \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) + Q(x),$$

причем оператор L'_0 , равный

$$L'_0 = (-1)^{m+1} \sum_{k_1+\dots+k_n=2m} A^{k_1\dots k_n}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + L'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + Q(x),$$

будет самосопряженным оператором и для него выполнено условие (3). Коэффициенты же операторов $B'_l\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ по-прежнему будут удовлетворять неравенству (4).

Перепишем теперь равенство

$$\overline{L}u = \lambda u$$

в виде *

$$u + \sum_{l=0}^{2m-1} B'_l L_0^{-1} u = \lambda L_0^{-1} u.$$

В силу леммы 1 некоторая степень оператора L_0^{-1} есть оператор Гильберта — Шмидта, а оператор $\sum_{l=0}^{2m-1} B'_l L_0^{-1}$ вполне непрерывный. Из теоремы М. В. Келдыша и получаем требуемое утверждение.

3°. Наметим кратко доказательство основной теоремы 1. Вместе с эллиптическим оператором (α) рассмотрим оператор параболический:

$$\tilde{P} = \frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{m+1} \sum_{k_1+\dots+k_n=2m} A^{k_1+\dots+k_n}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} - Q(x). \quad (3)$$

Функцию Грина $G(t, \tau, x, y)$ этого оператора, как известно ^(2,3), можно искать в виде

$$G(t, \tau, x, y) = \bar{G}(t, \tau, x - y, x) + \int_{\tau}^t d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(t, \mu, x - \xi, x) \varphi(\mu, \tau, \xi, y) d\xi.$$

Матрица $\varphi(t, \tau, x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(t, \tau, x - y, x) + \varphi(t, \tau, x, y) + \int_{\tau}^t d\mu \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \mu, x - \xi, x) \varphi(\mu, \tau, \xi, y) d\xi = 0. \quad (5)$$

Ядро $K(t, \tau, x - y, x)$ определяется равенством

$$K(t, \tau, x - y, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{m+1} \sum A^{k_1\dots k_n}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + Q(x) \right) \bar{G}(t, \tau, x - y, x).$$

Функция $\bar{G}(t, \tau, x - y, x)$ получается следующим образом. Строится функция Грина $\bar{G}(t, \tau, x - y, z)$ оператора L_z с постоянными коэффициентами и параметрической точкой z :

$$L_z = \frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{m+1} \sum_{k_1+\dots+k_n} A^{k_1\dots k_n}(z) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}} + Q(z).$$

Положив далее $z = x$, получим $\bar{G}(t, \tau, x - y, x)$.

* Очевидно, что, не ограничивая общности, можно считать $\lambda_0 = 0$.

Нетрудно показать, что при предположениях, сделанных относительно коэффициентов операторов, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \bar{G}(t, \tau, x-y, x) &\leq \frac{c_1 \exp \left(-c \frac{|x-y|^{2m'}}{(t-\tau)^{1/(2m-1)}} - Bg(x)(t-\tau) \right)}{(t-\tau)^{n/2m}}, \\ |K(t, \tau, x-y, x)| &\leq \\ &\leq \frac{c_2}{(t-\tau)^{(n+2m-1+\varepsilon)/2m}} \exp \left(-c_3 \frac{|x-y|^{2m'}}{(t-\tau)^{1/(2m-1)}} - B_1 g(x)(t-\tau) \right). \end{aligned}$$

Здесь все константы положительны и не зависят ни от x , ни от t , $\varepsilon \geq 0$ и $1/2m + 1/2m' = 1$.

Решив уравнение (5) по методу последовательных приближений, можно получить оценку:

$$\begin{aligned} |G(t, 0, x, y)| &\leq \frac{c_1}{t^{n/2m}} \exp \left(-c \frac{|x-y|^{2m'}}{t^{1/(2m-1)}} - g(x)t + Mt \right) + \\ &+ \frac{c_8 \exp \left(-\frac{c_2 |x-y|^{2m'}}{t^{1/(2m-1)}} + Mt \right)}{g^{1-\delta}(x) t^{(n-\varepsilon_1)/2m}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$\varepsilon > 0$ и δ — любое число > 0 .

Проинтегрировав неравенство (6) по t в пределах от 0 до ∞ , мы и получим требуемую оценку для $H(x, y)$. Конечно, предварительно следует избавиться от спектра, если нужно. После этого константа M в неравенстве может быть сделана отрицательной и интегрирование станет возможным. Для производных функции Грина параболического оператора получаются аналогичные оценки, из них и следует неравенство (3).

4°. Можно несколько расширить класс операторов, для которых имеют место оценки для резольвент, позволяющие делать заключения о полноте ортогонных векторов на основе теоремы М. В. Келдыша, однако формулировки теорем несколько усложнятся. Приведем такой пример.

Рассмотрим оператор L вида

$$L = (-1)^{m_1} \frac{\partial^{2m_1}}{\partial x_1^{2m_1}} + \dots + (-1)^{m_n} \frac{\partial^{2m_n}}{\partial x_n^{2m_n}} + (q(x) + ip(x)). \quad (7)$$

Предположим, что $q(x)$ имеет m производных ($m = \max \{2m_1, \dots, 2m_n\}$), которые удовлетворяют неравенству

$$|q^{(l)}(x)| \leq cq^{(l+m)/m}(x), \quad q(x) \geq c|x|^\alpha + c_2 \quad (8)$$

при некотором $\alpha > 0$.

Теорема 3. Пусть $\frac{|p(x)|}{q(x)} \rightarrow 0$, если $|x| \rightarrow \infty$, и выполнены условия (8). Тогда оператор (7) имеет дискретный спектр и система собственных функций полна.

Отметим, что теорема о полноте для операторов Штурма—Лиувилля Шредингера при несколько иных предположениях была доказана в (4, 5).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). 2 Э. Э. Левин, УМН, в. 8, (1940).
Д. Эйдельман, Матем. сборн., 38, № 1, 51 (1956). 4 В. Б. Лидский, ДАН,
№ 2 (1956). 5 Ф. Максудов, Изв. АН АзербССР, в. 6 (1958).

С. Н. КРУЖКОВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ В ЦЕЛОМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петреским 28 XII 1959)

В настоящей заметке рассматривается задача Коши для уравнения

$$u_t + \varphi(u_x) = 0, \quad \varphi''(v) \geq a > 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad (1)$$

в полуплоскости $t \geq 0$ с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2)$$

где $u_0(x)$ — произвольная ограниченная функция.

Мы определим обобщенное решение задачи (1), (2), покажем его существование, единственность, непрерывную зависимость от начальных условий и выясним некоторые свойства обобщенных решений. Одним из характерных свойств этих решений, существенно отличающим их от обобщенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка ^(1, 2), является то, что они непрерывны в полуплоскости $t > 0$ при любых начальных условиях.

В качестве следствия изучения задачи Коши (1), (2) с разрывными начальными функциями будет рассмотрена задача Коши для уравнения

$$v_t + (\varphi(v))_x = 0, \quad \varphi''(v) \geq a > 0, \quad \varphi'(0) = 0 \quad (3)$$

в случае, когда начальные условия могут быть отождествлены с некоторыми функционалами.

Пусть $\mathcal{L} = \bigcup_k \mathcal{L}(K)$, где $\mathcal{L}(K)$ — совокупность ограниченных функций, удовлетворяющих условию Липшица на всей прямой с константами $\leq K$.

1. Случай непрерывной начальной функции $u_0(x) \in \mathcal{L}$.

Определение 1. Непрерывная ограниченная функция $u(t, x)$ называется обобщенным решением задачи Коши (1), (2), если: 1) $u(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по обеим переменным с ограниченными при $t \geq 0$ константами; 2) $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду; 3) $u(0, x) = u_0(x)$; 4) $\Delta u_x / \Delta x \leq C/t$.

Теорема 1. Обобщенное решение $u(t, x)$ задачи Коши (1), (2) существует и единственно, причем

$$u(t, x) = \min_{-\infty < \sigma < \infty} I(\sigma, t, x), \quad I(\sigma, t, x) = u_0(x - t\varphi'(\sigma)) + t \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Доказательство единственности нетрудно получить, используя теорему единственности обобщенных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений ⁽¹⁾, заметив, что $v(t, x) = du/dx$ является обобщенным решением задачи Коши для уравнения (3) с начальным условием $v_0(x) = u'_0(x)$.

Для доказательства существования рассмотрим функцию, равную $\min_{-\infty < \sigma < \infty} I(\sigma, t, x)$. Пусть $\underline{\sigma}(t, x)$ — самая левая точка минимума функции $I(\sigma, t, x)$ при фиксированных t и x . Можно показать, что $\sigma(t, x) = \Phi((x - s^+(t, x))/t)$, где $\Phi(v)$ — обратная функция для $\varphi'(v)$, а $\bar{s}_+(t, x)$ — функция, рассмотренная в работе ⁽²⁾, стр. 436. Используя некоторые

свойства функции $s_+(t, x)$, указанные в ⁽²⁾, и тот факт, что при $u_0(x) \in \mathcal{L}(K)$ $|s_+(t, x)| \leq K$, получаем, что функция $\min_{-\infty < \sigma < \infty} I(\sigma, t, x)$ является обобщенным решением задачи Коши (1), (2).

Рассмотрим связь обобщенных решений задачи (1), (2) с решениями задачи Коши для нелинейных параболических уравнений

$$u_t + \varphi(u_x) = \varepsilon u_{xx}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (5)$$

Теорема 2. Существует единственная ограниченная функция $u_\varepsilon(t, x)$, имеющая при $t > 0$ непрерывные производные, входящие в уравнение (5), причем $|du_\varepsilon/dx| \leq K$, удовлетворяющая уравнению (5) и начальному условию

$$u_\varepsilon(0, x) = u_0(x) \in \mathcal{L}. \quad (6)$$

Единственность функции $u(t, x)$ вытекает из того, что разность двух таких функций удовлетворяет уравнению с принципом максимума.

Нетрудно показать существование решения задачи Коши (5), (6) в случае финитной начальной функции $u_0(x) \in C^{(2)}$. Опираясь на этот факт используя оценки Бернштейна для производных решений уравнения (5), можно осуществить построение решения задачи (5), (6) и для $u_0(x) \in \mathcal{L}$.

Следующее утверждение является теоремой о непрерывной зависимости решений задачи Коши (5), (6) от начальных условий (см. ⁽³⁾).

Теорема 3. Пусть $u_0(x)$ и $\tilde{u}_0(x) \in \mathcal{L}(K)$, $|u_0(x)| \leq M$, $|\tilde{u}_0(x)| \leq M$; $u(t, x)$ и $\tilde{u}(t, x)$ — соответствующие решения задачи (5), (6), причем $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Тогда для любого прямоугольника $R\{|x| \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ и $\gamma > 0$ можно указать такие N и $\delta > 0$, не зависящие от ε , что $|u_\varepsilon(t, x) - \tilde{u}_\varepsilon(t, x)| \leq \gamma$ в R , если $|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)| \leq \delta$ при $|x| \leq N$.

Заметим, что в теоремах 2 и 3 не использовалась выпуклость функции $\varphi(v)$. Если $\varphi(v)$ выпуклая, то имеет место

Лемма 1. Пусть $u_\varepsilon(t, x)$ — решение задачи (5), (6), причем $u_0(x) \in \mathcal{L}(K)$ $\varphi''(v) \geq a > 0$ при $|v| \leq K$. Тогда $\partial^2 u_\varepsilon / \partial x^2 \leq 1/at$.

Теорема 4. При $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $u_\varepsilon(t, x)$ задачи Коши (5), (6) сходятся к обобщенному решению задачи Коши (1), (2) равномерно в любом прямоугольнике полуплоскости $t \geq 0$.

Можно показать, что семейство $\{u_\varepsilon(t, x)\}$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ компактно в пространстве C на любом прямоугольнике в полуплоскости $t \geq 0$, причем, если $u_0(x) \in \mathcal{L}(K)$, имеют место оценки $|du_\varepsilon/dx| \leq K$ при $t > 0$ и $|\partial^2 u_\varepsilon / \partial x^2| \leq K_1(t_0)$, $|du_\varepsilon/dt| \leq K_2(t_0)$ при $t \geq \varepsilon t_0$. Вследствие леммы 1

оценки $|du_\varepsilon/dx| \leq K$ получаем, что $\varepsilon \int_a^b \left| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \right| dx \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно

на $t \geq \delta > 0$. На основании результатов работ ^(1,3) $\{du_\varepsilon/dx\}$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме L_1 на каждом прямоугольнике полуплоскости $t > 0$ ограниченной функции $v(t, x)$, причем $\Delta v / \Delta x \leq C/t$.

Опираясь на эти свойства последовательности $\{u_\varepsilon(t, x)\}$ и используя единственность обобщенного решения задачи (1), (2), можно доказать утверждение теоремы 4.

Теоремы об устойчивости обобщенных решений задачи (1), (2) относительно изменения начальных функций будут приведены ниже в более общем случае начальных условий.

2. Случай произвольной ограниченной начальной функции и $u_0(x)$.

Определение 2. Ограниченная функция $u(t, x)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если: 1) в любой полуплоскости $t \geq \delta > 0$ функция $u(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по обеим переменным с ограниченными константами; 2) $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду; 3) $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \mu(x) = \liminf_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \xi \in [x-\gamma, x+\gamma]}} u_0(\xi)$ ($\mu(x)$ — нижняя функция Бэра для $u_0(x)$); 4) $\Delta u_x / \Delta x \leq C/t$.

Теорема 5. Функция

$$u(t, x) = \min_{-\infty < \sigma < \infty} I(\sigma, t, x), \quad I(\sigma, t, x) = \mu(x - t\varphi'(\sigma)) + t \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi \quad (7)$$

обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с начальной функцией $u_0(x)$.

Из определения функции $u(t, x)$ вытекает следующее утверждение, при помощи которого нетрудно показать, что $u(t, x)$ удовлетворяет требованиям 1) и 3) обобщенного решения:

Лемма 2. Пусть $|u_0(x)| \leq M$; $K_+(t)$ и $K_-(t)$ — корни уравнения $\int_0^K \xi \varphi''(\xi) d\xi = \frac{2M}{t}$. Тогда $u(t, x) = \min_{K_-(t) \leq \sigma \leq K_+(t)} I(\sigma, t, x)$ и $\lim_{t \rightarrow 0} t\varphi'(K_-(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} t\varphi'(K_+(t)) = 0$.

Применяя следующую лемму 3 и используя теорему 1, получаем, что для $u(t, x)$ выполнены требования 2) и 4) обобщенного решения.

Лемма 3. Пусть $u(t, x) = \min_{-\infty < \sigma < \infty} I(\sigma, t, x)$, $u^\alpha(t, x) = \min_{-\infty < \sigma < \infty} [u(\alpha, x - t\varphi'(\sigma)) + t \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi]$. Тогда $u^\alpha(t, x) = u(t + \alpha, x)$.

Для доказательства рассмотрим функцию $G(\sigma, s) = \mu(x - t\sigma - \alpha s) + t \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi + \alpha \int_0^s \xi \varphi''(\xi) d\xi$ при фиксированных x и $t > 0$. Нетрудно видеть, что утверждение леммы эквивалентно равенству $\min_{-\infty < \sigma, s < \infty} G(\sigma, s) = \min_{-\infty < \sigma < \infty} G(\sigma, \sigma)$. Используя выпуклость функции $g(\sigma) = \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi$, можно показать, что $G(\sigma, s) \geq G(\sigma_0, \sigma_0)$, где $\sigma_0 = (t\sigma + \alpha s) / (t + \alpha)$. Отсюда $\min_{-\infty < \sigma, s < \infty} G(\sigma, s) \geq \min_{-\infty < \sigma < \infty} G(\sigma, \sigma)$; неравенство в другую сторону очевидно.

Теорема 6. Пусть $\{u_n(x)\}$ — неубывающая последовательность непрерывных функций, причем $|u_n(x)| \leq M$, $u_n(x) \in \mathcal{L}(K_n)$; $u_n(t, x)$ — соответствующие обобщенные решения задачи (1), (2) согласно определению 1. Тогда $\{u_n(t, x)\}$ сходится равномерно на каждом прямоугольнике в полуплоскости $t > 0$ к функции $u(t, x) = \min_{-\infty < \sigma < \infty} [\mu(x - t\varphi'(\sigma)) + t \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi]$, где $\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$.

Используя представление (4) для функций $u_n(t, x)$, можно получить поточечную сходимости неубывающей последовательности $\{u_n(t, x)\}$ к $u(t, x)$. Но так как $u(t, x)$ непрерывна при $t > 0$, то $\{u_n(t, x)\}$ сходится к $u(t, x)$ равномерно в каждом прямоугольнике полуплоскости $t > 0$.

Теорема 7. Обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с произвольной ограниченной начальной функцией $u_0(x)$ единственно.

Пусть $u(t, x)$ — некоторое решение для начальной функции $u_0(x)$. Из определения обобщенного решения $u^\alpha(x) = u(\alpha, x) \in \mathcal{L}(K_\alpha)$ при любом $\alpha > 0$. Так как $\varphi(v) \geq 0$, то из уравнения (1) $\{u^\alpha(x)\}$ — неубывающая последовательность при $\alpha \rightarrow 0$. Обозначим через $u^\alpha(t, x)$ обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с начальным условием $u^\alpha(x)$ согласно определению 1; вследствие теоремы 1 $u^\alpha(t, x) = u(t + \alpha, x)$. Применяя к последовательности $\{u^\alpha(t, x)\}$ теорему 6 и учитывая при этом, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u^\alpha(x) = \mu(x)$, имеем $u(t, x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u(t + \alpha, x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^\alpha(t, x) =$

$$= \min_{-\infty < \sigma < \infty} \left[\mu(x - t\varphi'(\sigma)) + t \int_0^\sigma \xi \varphi''(\xi) d\xi \right].$$

Итак, показано, что начальным функциям, имеющим одинаковую нижнюю функцию Бэра, соответствует одно и то же обобщенное решение задачи Коши (1), (2).

Теорема 8. Пусть $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ — нижние функции Бэра для $u_1(x)$, $u_2(x)$, $|\mu_1(x)| \leq M$, $|\mu_2(x)| \leq M$; $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ — обобщенные решения задачи Коши (1), (2) с начальными функциями соответственно $u_1(x)$, $u_2(x)$. Тогда для любого прямоугольника $R\{|x| \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ и $\gamma \geq 0$ можно указать такое N , что $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \gamma$ в R , если $|\mu_1(x) - \mu_2(x)| \leq \gamma$ при $|x| \leq N$.

Доказательство вытекает из (7), если использовать при этом лемму 2.

Теорема 8 показывает, что решения задачи Коши (1), (2) имеют конечную область зависимости от начальных условий. Теорема 6 тоже может рассматриваться как теорема об устойчивости обобщенных решений задачи (1), (2) относительно изменения начальных функций.

Из (7) нетрудно получить следующее свойство обобщенных решений:

Теорема 9. Пусть $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи (1), (2) с начальным условием $u_0(x)$, $|u_0(x)| \leq M$, $\mu_0 = \inf_{-\infty < x < \infty} u_0(x)$. Тогда $u(t, x) \rightarrow \mu_0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно на каждом отрезке $|x| \leq l$.

3. О задаче Коши для квазилинейного уравнения (3). В любом $[a, b]$ рассмотрим пространство $A_{[a, b]}$ абсолютно непрерывных

функций с нормой $\|\psi\| = |\psi(a)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx$. При помощи ограниченной

полунепрерывной снизу функции $\mu(x)$, заданной на всей прямой, определим линейный непрерывный функционал над каждым из пространств

$A_{[a, b]}$ по формуле $(f, \psi) = - \int_a^b \mu(x) \psi'(x) dx + \mu(b) \psi(b) - \mu(a) \psi(a)$.

Заметим, что в тех случаях, когда $\mu(x)$ непрерывна или имеет ограниченное изменение на $[a, b]$, функционал f является функционалом типа

Ри т. е. $(f, \psi) = \int_a^b \psi(x) d\mu(x)$.

Определение 3. Обобщенным решением задачи Коши для уравнения (3) с начальным условием f называется ограниченная при $t \geq \delta > 0$ измеримая функция $v(t, x)$, если: 1) для любого кусочно-гладкого контура Γ в полуплоскости $t \geq 0$ $\oint_{\Gamma} v dx - \varphi(v) dt =$

0, причем $\int_a^b v(0, x) dx = \mu(b) - \mu(a)$ (^{3, 4}); 2) $\Delta v / \Delta x \leq C / t$.

Соответствующие теоремы существования, единственности таких обобщенных решений, их устойчивость относительно изменения начальных данных можно получить из предыдущих результатов, опираясь на то, что $v(t, x) = du / dx$, где $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи Коши (1), (2) с начальным условием $u_0(x) = \mu(x)$.

Нетрудно показать, что $\int_a^b v(t, x) \psi(x) dx \rightarrow (f, \psi)$ при $t \rightarrow 0$ для $\psi \in A_{[a, b]}$

при любых a и b .

Выражаю благодарность проф. О. А. Олейник за постановку задачи и большое внимание к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. А. Олейник, Усп. матем. наук, **12**, в. 3 (75) (1957). ² О. А. Олейник, Моск. матем. общ., **5** (1956). ³ О. А. Олейник, Усп. матем. наук, **14**, в. 2(86) (1959). ⁴ A. Douglas, Comm. Pure and Appl. Math., **12**, № 1 (1959). ⁵ И. Г. Нансон, Теория функций вещественной переменной, М., 1957.

Л. П. НИЖНИК

ЗАДАЧА РАССЕИВАНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 XII 1959)

Задача рассеивания плоских волн для уравнения

$$\square u(x, t) + c(x, t)u(x, t) = 0, \quad (1)$$

где x — точка трехмерного евклидова пространства E^3 ; $\square = \Delta - \partial^2 / \partial t^2$, может быть поставлена следующим образом: требуется найти решение уравнения (1), имеющее вид $u = u(x, t; \omega, \mu) = e^{i\omega(u \cdot x - t)} + v(x, t; \omega, \mu)$, где μ — орт направления плоской волны $e^{i\omega(u \cdot x - t)}$, а v при $|x| \rightarrow \infty$ удовлетворяет условиям излучения Фока ((1), стр. 435, 2)

$$v = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |\text{grad } v| = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial |x|} + \frac{\partial v}{\partial t} = o\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (2)$$

При этом будем предполагать, что условия (2) выполняются равномерно по $t \in (-\infty, \infty)$ *.

Если $c(x, t)$ не зависит от t , то уравнение (1) разделением переменных сводится к стационарному уравнению Шредингера $-\Delta u + cu = k^2 u$, а условия излучения Фока превращаются в этом случае в известные условия излучения Зоммерфельда. Задача рассеивания для уравнения Шредингера была решена в работе (3), обратная задача изучалась в работах (4-6).

В настоящей заметке будет показано, что при определенных условиях типа гладкости и убывания на бесконечности, наложенных на функцию $c(x, t)$, существует и единственно решение задачи рассеивания для уравнения (1). Кроме того, рассмотрен вопрос о восстановлении функции $c(x, t)$ по данным рассеивания.

Излагаемые результаты можно перенести на уравнение $[\square - m^2 + c(x, t)]u = 0$. При этом выделение расходящихся волн при помощи условий излучения Фока надо заменить принципом предельного поглощения ((7), стр. 499). В этом случае рассеивание плоских волн можно трактовать как рассеивание мезонов на нестационарном силовом центре.

1°. Всюду в дальнейшем будем считать, что $c(x, t)$ вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно являются непрерывными функциями, которые мажорируются функцией $\frac{K(t)}{1 + |x|^{3+\epsilon}}$, где $\epsilon > 0$, а функция $K(t)$ равномерно ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$.

Через $C(\Omega)$ будем обозначать пространство Банаха непрерывных функций на Ω с равномерной нормой. \square_r^{-1} будет обозначать обращение оператора \square при помощи запаздывающей функции Грина: $\square_r^{-1}f(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f(s, t - |x - s|)}{|x - s|} ds$.

* Можно было бы считать, что условия (2) выполняются при $t = t_0 - |x|$ равномерно по t_0 из произвольного конечного промежутка (-).

Если существует решение задачи рассеивания $u = e^{i\omega(\mu \cdot x - t)} + v$ для уравнения (1), то $\square v + cv = -ce^{i\omega(\mu \cdot x - t)}$. Так как v удовлетворяет условиям излучения, то ⁽¹⁾

$$v = -\square_r^{-1}ce^{i\omega(\mu \cdot x - t)} - \square_r^{-1}cv. \quad (3)$$

Наоборот, всякое достаточно гладкое решение уравнения (3) в сумме с плоской волной $e^{i\omega(\mu \cdot x - t)}$ дает решение задачи рассеивания. Обозначим для краткости оператор

$$-\square_r^{-1}cv = Av.$$

Лемма 1. Если существует и единственно решение уравнения $w = h + Aw$ в $C(E^4)$ при любой правой части h , то существует и единственно решение задачи рассеивания.

Доказательство. Единственность решения задачи рассеивания следует из единственности решения уравнения $w = Aw$ в $C(E^4)$. Пусть существует решение уравнения $w = h + Aw$ в $C(E^4)$ при любой правой части h . Это означает, что оператор $(I - A^*)^{-1}$ ограничен. Рассмотрим оператор $D_m = -d^2/dt^2 + m^2$. Этот оператор имеет в $C(E^4)$ ограниченный обратный D_m^{-1} . Оператор $D_mAD_m^{-1} = A - 2\square_r^{-1}c'_t \frac{\partial}{\partial t} D_m^{-1} - \square_r^{-1}c''_{tt} D_m^{-1} = A + B_m$, где B_m — ограниченный оператор, который при больших m по норме может быть сделан сколь угодно малым. Поэтому при больших m существует ограниченный оператор $(I - A^* - B_m^*)^{-1} = [I - (D_mAD_m^{-1})^*]^{-1}$, т. е. уравнение $\varphi = f + D_mAD_m^{-1}\varphi$ имеет решение в $C(E^4)$ при любой правой части f . Если обозначить $D_m^{-1}\varphi = w$, то $w = D_m^{-1}f + Aw$. Таким образом, при достаточно гладких свободных членах h существуют гладкие решения уравнения $w = h + Aw$. Если выбрать $h = Ae^{i\omega(\mu \cdot x - t)}$, то получим, что решение уравнения (3) существует и является достаточно гладкой функцией, т. е. существует решение задачи рассеивания.

Теорема 1. При малых $c(x, t)$ ($K(t) < \varepsilon/3$) существует и единственно решение задачи рассеивания для уравнения (1).

Доказательство следует из леммы 1 и того, что при малых $c(x, t)$ $\|A\| < 1$.

2°. В этом пункте будем предполагать, что $K(t) \leq \frac{C}{1 + |t|^{1+\delta}}$, $\delta > 0$. Через $L_2(p(x))$ будем обозначать пространство Гильберта с нормой $\|f(x, t)\|^2 = \int |f(x, t)|^2 p(x) dx dt$.

Лемма 2. Если при некотором $a > 0$ существует и единственно решение уравнения $w = h + Aw$ в $L_2((1 + |x|)^{-1-a})$ при любой правой части h , то существует и единственно решение задачи рассеивания для уравнения (1).

Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. При $\varepsilon > 1/2 + 1/2a$ оператор A вполне непрерывный в $L_2((1 + |x|)^{-1-a})$.

Действительно, рассмотрим оператор $A_\xi f(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-\xi|x-s|}}{|x-s|} c(s, t - |x-s|) f(s, t - |x-s|) ds$ при $\xi \geq 0$, $A_0 = A$. Можно легко доказать, что оператор A_ξ при $\xi \geq 0$ ограниченный в $L_2((1 + |x|)^{-1-a})$ и $\|A_\xi - A_0\| \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Оператор A_ξ при $\xi > 0$ вполне непрерывный в $L_2((1 + |x|)^{-1-a})$. Для этого достаточно показать, что оператор $A_\xi' f = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-\xi|x-s|}}{|x-s|} c(s, t - |x-s|) (1 + |s|)^{1/2+1/2a} f(s, t - |x-s|) ds$ вполне непрерывный в $L_2(E^4)$. Но унитарно эквивалентный оператор $T_\xi = A_\xi' U^{-1}$, где U — преобразование Фурье, имеет вид $(T_\xi \varphi)(p) =$

$= (T_{\xi} \varphi)(\bar{p}, p_0) = \frac{1}{\bar{p}^2 - (p_0 - i\xi)^2} \int b(p - q) \varphi(q) d_4 q$ ($b(p)$ — преобразование Фурье $c(x, t)$ $(1 + |x|)^{1/2 + 1/2a}$ и полная непрерывность оператора T_{ξ} проверяется аналогично лемме 2 работы (8). Следовательно, вполне непрерывный и A'_{ξ} , а значит и оператор A_{ξ} при $\xi > 0$. Так как $\|A_{\xi} - A_0\| \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, то и оператор $A_0 = A$ вполне непрерывный.

Лемма 4. Если $\varepsilon > 1/2 + 1/2a$, то уравнение $\omega = A\omega$ в $L_2((1 + |x|)^{-1-a})$ имеет только тривиальное решение $\omega = 0$.

В самом деле, пусть имеется нетривиальное решение уравнения $\omega = A\omega$. Обозначим его ω_0 . Рассмотрим оператор A на функциях из пространства $t \leq T$. При достаточно отрицательных T $\|A\| < 1$, и поэтому $\omega_0 = 0$ при таких t . Пусть T_0 — наибольшее число, для которого $\omega_0 = 0$ при $t \leq T_0$. Оценивая равенство $\omega_0 = A\omega_0$, получаем

$$\int_{t \leq T_0 + \Delta} |\omega_0(x, t)|^2 (1 + |x|)^{-1-a} dx dt \leq C_1 \Delta^2 \int_{t \leq T_0 + \Delta} |\omega_0(x, t)|^2 (1 + |x|)^{-1-a} dx dt.$$

Если Δ — достаточно малое число, то $\omega_0 = 0$ при $t \leq T_0 + \Delta$. Это противоречит выбору T_0 .

Из общей теории уравнений в пространствах Банаха и лемм 2, 3 и 4 следует

Теорема 2. При $\varepsilon > 1/2$ существует и единственно решение задачи рассеивания для уравнения (1).

3°. Можно легко доказать, что решение задачи рассеивания имеет следующий асимптотический вид при $|x| \rightarrow \infty$:

$$u(x, t; \omega, \mu) = e^{i\omega(\mu \cdot x - t)} + \frac{\rho(t - |x|, \nu; \omega, \mu)}{|x|} + o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

где ν — орт направления вектора x ; $\rho(\tau, \nu; \omega, \mu)$ — равномерно ограниченная функция своих аргументов.

Переходя к преобразованию Фурье функции ρ по первому аргументу, получаем

$$u(x, t; \omega, \mu) = e^{i\omega(\mu \cdot x - t)} + \int \frac{e^{i\gamma(|x| - t)}}{|x|} F(\gamma, \nu; \omega, \mu) d\gamma + o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

где $F(\gamma, \nu; \omega, \mu)$, как преобразование Фурье ограниченной функции, является обобщенной функцией типа меры, и поэтому $\int \frac{e^{i\gamma(|x| - t)}}{|x|} F(\gamma, \nu; \omega, \mu) d\gamma$ изображает сумму расходящихся сферических волн различной частоты. Если функция $c(x, t)$ удовлетворяет условиям пункта 2°, то эта сумма будет непрерывной. В стационарном случае, когда $F(\gamma, \nu; \omega, \mu) = \delta(\gamma - \omega) f(\nu, \omega, \mu)$, рассматриваемый интеграл сведется к одному слагаемому $\frac{e^{i\omega(|x| - t)}}{|x|} f(\nu, \omega, \mu)$, где $f(\nu, \omega, \mu)$ — обычная амплитуда рассеивания. Функцию $F(\gamma, \nu; \omega, \mu)$, по аналогии со стационарным случаем, будем называть амплитудой рассеяния.

Используя методику работ (4, 6), рассмотрим вопрос о восстановлении функции $c(x, t)$ по амплитуде рассеивания.

Теорема 3. По амплитуде рассеивания $F(\gamma, \nu; \omega, \mu)$ однозначно восстанавливается преобразование Фурье функции $c(x, t)$ вне светового конуса $\bar{p}^2 - p_0^2 \geq 0$. При этом $(\bar{p}^2 - p_0^2 \geq 0)$.

$$\tilde{c}(\bar{p}, p_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int c(x, t) e^{i(\bar{p} \cdot x + p_0 t)} dx dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega + p_0, \nu; \omega, \mu).$$

$\omega \rightarrow (\omega + p_0)\nu = \bar{p}$

Доказательство. На основании леммы 1⁽⁹⁾ (или леммы 1.3⁽⁵⁾) можно показать, что при больших ω $v = Ae^{i\omega(\mu \cdot x - t)} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$. Следовательно,

$$F(\gamma, \nu; \omega, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int e^{-i\gamma(\nu \cdot x - t)} c(x, t) e^{i\omega(\mu \cdot x - t)} dx dt + O\left(\frac{1}{\omega}\right) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int c(x, t) e^{i(\bar{p} \cdot x + p_0 t)} dx dt + O\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

$p_0 = \gamma - \omega$, $\bar{p} = \omega\mu - \gamma\nu$. Переходя к пределу при $\omega \rightarrow \infty$, получаем точную формулу восстановления.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Берескому, под руководством которого выполнена эта работа.

Институт математики
Академии наук СССР

Поступило
25 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Фо́к, Теория пространства — времени и тяготения, 1955. ² И. Т. То́лов, УМН, **13**, в. 2(80), (1958). ³ А. Я. По́взнер, Матем. сборн., **32** (74), (1953). ⁴ Э. Э. Шно́ль, Автореферат кандидатской диссертации, МГУ, 1955. ⁵ М. Бе́резанский, Тр. Моск. матем. общ., **7**, 3 (1958). ⁶ Л. Д. Фа́ддеев, Тр. Ленинградск. ун-в., № 7 (1956). ⁷ А. Н. Ти́хонов, А. А. Сама́рский, Учен. зап. к. каф. физики, 1951. ⁸ Л. П. Ни́жник, ДАН, **124**, № 3 (1959). ⁹ Л. Д. Фа́ддеев, Вестн. Ленинградск. ун-в., № 7 (1957).

Л. В. ОВСЯННИКОВ

ОБ ОТЫСКАНИИ ГРУППЫ ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векун 28 XII 1959)

В настоящей работе мы сообщаем о некоторых результатах, связанных с задачей отыскания группы преобразований, сохраняющих заданное линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка при любом числе n независимых переменных ($n > 1$). После вывода определяющих уравнений инфинитезимальных преобразований мы устанавливаем инвариантную форму этих уравнений, содержащую только ассоциированные с данным уравнением риманово пространство, вектор этого пространства и инвариант. Окончательное решение задачи еще не получено; мы приводим здесь только некоторые общие факты.

Отметим, что первоначальная общая постановка таких задач — задача групповой классификации систем дифференциальных уравнений — принадлежит С. Ли ⁽¹⁾. В частности, им была получена классификация линейных уравнений второго порядка для случая $n = 2$, правда, в неинвариантной форме. Эта постановка отлична от той, которая недавно предложена в работе И. М. Гельфанда ⁽²⁾, где искомыми являются уравнения, допускающие заданную группу.

1. Пусть $u = u(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $u_i = \partial u / \partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u / \partial x^i \partial x^j$. Введем обозначения для систем значений величин, указанных в скобках: $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $v = (x, u)$, $p = (v, u_1, u_2, \dots, u_n)$, $q = (p, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{nn})$.

Рассмотрим уравнение

$$F(q) \equiv a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + cu = 0 \quad (a^{ij} = a^{ji}), \quad (1)$$

где a^{ij} , b^i , c — заданные аналитические функции от x , причем используется (как и ниже) тензорное правило записи суммы по повторяющемуся индексу (все индексы принимают значения $1, 2, \dots, n$).

Задача ставится так: найти все преобразования вида

$$p' = f(p), \quad (2)$$

принадлежащие некоторым однопараметрическим группам Ли и сохраняющие уравнение (1) в том смысле, что $F(q') = 0$ всякий раз, как $F(q) = 0$.

Эти преобразования порождают локальную группу Ли ⁽³⁾ преобразований, обозначаемую далее G_F . При этом говорят, что уравнение (1) допускает преобразования (2) или, соответственно, группу G_F .

Заметим, что G_F всегда содержит преобразования, отличные от тождественного. Такими преобразованиями являются

$$x' = x, \quad u' = \alpha u + u_0(x), \quad (3)$$

где α — произвольный параметр, а $u_0(x)$ — любое фиксированное решение уравнения (1). Множество всех преобразований вида (3) само является группой, следовательно, подгруппой группы G_F . Эту подгруппу мы обозначим T .

2. Однопараметрическая группа преобразований вида (2) вполне характеризуется своим инфинитезимальным оператором

$$Y = \xi^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(p) \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_i(p) \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (4)$$

который можно продолжить на вторые производные u_{ij} и получить оператор, действующий на функции от q :

$$\tilde{Y} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \omega_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}}. \quad (5)$$

и эти величины ζ_i и ω_{ij} вычисляются по известным формулам преобразования

$$\zeta_i = D_i(\eta) - u_j D_i(\xi^j), \quad \omega_{ij} = D_i(\zeta_j) - u_{jl} D_i(\xi^l), \quad (6)$$

дифференциальные операции D_i определены формулой

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

В терминах оператора (4) поставленная задача формулируется так: найти все операторы Y такие, что $\tilde{Y}F(q) = 0$ всякий раз, как $F(q) = 0$. В более подробной записи это условие инвариантности имеет вид

$$\left[a^{ij} \omega_{ij} + b^i \zeta_i + c \eta + \xi^k \left(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^k} u_{ij} + \frac{\partial b^i}{\partial x^k} u_i + \frac{\partial c}{\partial x^k} u \right) \right]_{F(q)=0} = 0. \quad (8)$$

Согласно постановке задачи величины ζ_i не должны зависеть от u_{ij} . Поэтому совокупность слагаемых в выражениях для ζ_i по формулам (6), содержащих u_{ij} , должна обращаться в нуль при условии $F(q) = 0$. При $n > 1$ имеет место:

Лемма 1. Для того чтобы величины ζ_i не зависели от u_{ij} при $F(q) = 0$, необходимо и достаточно существование функции $\varphi = \varphi(p)$ такой, что

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad \eta = \varphi - u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad \zeta_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - u_i \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

3. Уравнение $F'(q') = 0$ будем называть эквивалентным уравнению (1), если оно получается из (1) в результате замены переменных (подстановки) вида

$$x' = x'(x), \quad u(x) = \phi(x) u'(x') \quad (10)$$

последующего деления на $\phi(x)$. Если в (10) $x' \equiv x$, то соответствующее уравнение $F'(q') = 0$ назовем эквивалентным по функции уравнению (1).

При замене переменных (10) группа G_F преобразуется в подобную ей группу $G_{F'}$. Поэтому задача отыскания G_F равносильна задаче отыскания любой $G_{F'}$.

Лемма 2. Кроме случая, когда (1) эквивалентно уравнению $u_{12} = 0$, функция $\varphi(p)$ линейна по переменным u , u_1, u_2, \dots, u_n .

В дальнейшем случай уравнения $u_{12} = 0$ мы оставим в стороне. Тогда лемма 2, в силу (9), следует, что $\xi^i = \xi^i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\eta = \sigma(x)u + \tau(x)$. Поэтому преобразования G_F могут быть представлены как преобразования вида $v' = f(v)$. Кроме того, как показывает более подробное рассмотрение, функция $\tau(x)$ должна быть решением уравнения (1). Отсюда в сочетании с аналитическим признаком нормального делителя ⁽⁴⁾, следует

Лемма 3. Подгруппа T есть нормальный делитель в G_F . Преобразования фактор-группы G_F/T характеризуются инфинитезимальными операторами вида

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma(x) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (11)$$

где $\sigma(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого.

В силу лемм 2 и 3 и формул (6), (7), (9) условие (8), левая часть которого оказывается линейной функцией от величин u_{ij} , «расщепляется» и порождает следующую систему уравнений:

$$a^{ik} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + a^{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial a^{ij}}{\partial x^k} \xi^k = \mu a^{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n); \quad (12)$$

$$2a^{ik} \frac{\partial \sigma}{\partial x^k} = a^{kl} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^k \partial x^l} + b^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial b^i}{\partial x^k} \xi^k - \mu b^i \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (13)$$

$$a^{ij} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} + b^i \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = - \frac{\partial c}{\partial x^i} \xi^i - \mu c, \quad (14)$$

где $\mu = \mu(x)$ — вспомогательная функция, подлежащая исключению из этой системы. Уравнения (12) — (14) являются определяющими уравнениями инфинитезимальных преобразований группы G_F/T . При помощи этих уравнений легко доказывается следующая теорема (обратная к которой тривиальна):

Теорема 1. Если уравнение (1) допускает хотя бы один (не нулевой) оператор (11), то оно эквивалентно уравнению, все коэффициенты которого не зависят от одной из координат.

4. В дальнейшем мы ограничимся предположением, что общий ранг матрицы $\|a^{ij}\|$ равен n . Тогда, заметив, что при замене независимых переменных (10) коэффициенты a^{ij} преобразуются как компоненты контравариантного тензора, мы можем ввести в рассмотрение ковариантные компоненты этого тензора a_{ij} ($a_{ij} a^{jk} = \delta_i^k$). Тем самым с уравнением (1) ассоциируется риманово пространство V_n с фундаментальной формой $a_{ij} dx^i dx^j$. Мы перейдем к отысканию инвариантной по отношению к V_n формы определяющих уравнений (12) — (14).

Так как уравнения (12) представляют собой не что иное, как определяющих уравнения конформных преобразований V_n (5), то предыдущие рассмотрения приводят к следующей теореме.

Теорема 2. Группа G_F/T невырожденного уравнения (1) есть подгруппа группы конформных преобразований ассоциированного с этим уравнением риманова пространства V_n .

Отсюда следует, в частности, что при $n > 2$ группа G_F/T имеет порядок не более $(n+1)(n+2)/2$.

Коэффициенты b^i уравнения (1) не являются компонентами вектора. Однако легко проверить, что величины

$$a^i = b^i + a^{kl} \Gamma_{kl}^i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

где Γ_{kl}^i — символы Кристоффеля второго рода, вычисленные для ассоциированного V_n , уже образуют контравариантный вектор.

Уравнения (13) можно рассматривать как уравнения, служащие для определения функции $\sigma(x)$. Если при помощи ковариантных компонент a_i вектора a^i образовать кососимметрический тензор $K_{ij} = a_{i,j} - a_{j,i}$ (здесь обозначаются ковариантные производные относительно тензора a_{ij}), то условиям интегрируемости уравнений (13) можно придать следующий инвариантный вид:

$$(K_{il} \xi^l)_{,j} = (K_{jl} \xi^l)_{,i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Уравнение (14) посредством исключения ε при помощи (13) приводится к следующей инвариантной форме:

$$H_i \xi^i + \mu H = 0, \quad (17)$$

H — инвариант, определяемый формулой

$$H = -2c + a_i^i + \frac{1}{2} a^i a_i + \frac{n-2}{2(n-1)} R, \quad (18)$$

чем R — скалярная кривизна ассоциированного V_n .

Аналитическая природа величин K_{ij} и H выясняется следующим предположением:

Лемма 4. Для того чтобы два уравнения вида (1) с одинаковыми V_n и эквивалентны по функции, необходимо и достаточно, чтобы эти уравнения имели одинаковые тензор K_{ij} и инвариант H .

Таким образом, набор величин K_{ij} и H является обобщением инвариантов Лапласа, известных для случая $n = 2$ ⁽⁸⁾.

Б. Если считать, что группа конформных преобразований V_n является изученным объектом, то далее возникает проблема исследования инвариантов геометрического или группового характера, накладываемых на группу G_F/T дополнительными условиями (16) и (17).

Важное свойство H дается следующей леммой:

Лемма 5. При переходе от уравнения (1) к уравнению $g(x)F(q) = 0$ инвариант H умножается на $g(x)$.

Это свойство показывает, что необходимо различать случаи $H = 0$ и $H \neq 0$. Мы рассмотрим здесь только последний.

Если $H \neq 0$, то, в силу леммы 5, без ограничения общности можно считать $H = 1$. Тогда из (17) следует $\mu = 0$, чем доказана следующая лемма:

Теорема 3. Если $H \neq 0$, то G_F/T есть подгруппа группы движений некоторого риманова пространства, конформного ассоциированному V_n .

В качестве частного следствия отсюда получаем, что при $n > 2$ порядок группы G_F/T уравнения, у которого $H \neq 0$, не превосходит $(n+1)/2$.

Представляет интерес вопрос о том, в каких случаях группа G_F/T может иметь максимальный возможный порядок. Условимся вообще называть стандартной формой уравнения (1), допускающего G_F/T с любыми свойствами, простейшую из возможных форм этого уравнения, получаемых переходом к эквивалентному и умножением на некоторый множитель.

Заметим, что если при $H \neq 0$ уравнение (1) допускает G_F/T максимального порядка, то V_n , ассоциированное с уравнением $(1/H)F(q) = 0$, имеет постоянную кривизну K_0 ⁽⁹⁾. Отсюда после некоторых вычислений получается:

Теорема 4. При $n > 2$ стандартной формой уравнения (1), допускающего G_F/T порядка $n(n+1)/2$, является либо ($K_0 = 0$)

$$\Delta u + u = 0,$$

либо ($K_0 \neq 0$)

$$\Delta u + \frac{n(n-2)}{(1+r^2)^2} u = 0,$$

Δ — оператор Лапласа, $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2$.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступило
23 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ S. Lie, Arch. f. Math., 6, N. 3 (1881). ² И. М. Гельфанд, ДАН, 70, № 1 (1959). ³ Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., 1954. ⁴ Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, М.—Л., 1949. ⁵ Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, 1948. ⁶ G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 1889.

И. В. ОСТРОВСКИЙ

О СВЯЗИ РОСТА МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЕЕ ЗНАЧЕНИЙ ПО АРГУМЕНТАМ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 XII 1959)

Исследованиями Б. Я. Левина и А. Пфлюгера (основные результаты, а также ссылки на оригинальные работы см. ⁽¹⁾) было установлено, что определенные требования регулярности, наложенные на модули нулей целой функции, влекут за собой регулярность ее роста. Цель настоящей заметки — показать, что определенные ограничения, наложенные только на аргументы нулей и единиц целой функции, влекут за собой довольно сильную регулярность ее роста *. Мы здесь покажем, что эти результаты переносятся и на мероморфные функции.

¹°. Будем придерживаться следующих обозначений: $f(z)$ — функция, мероморфная во всей конечной плоскости; α и β — числа, удовлетворяющие неравенству $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, $\gamma = \beta - \alpha$; $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ — числа, удовлетворяющие неравенству $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2\pi$; (R) — система лучей $\arg z = \alpha_j$; $\gamma_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j$ ($\alpha_{n+1} = \alpha_1 + 2\pi$); $\theta = \min_{1 \leq j \leq n} \gamma_j$; $\Theta = \max_{1 \leq j \leq n} \gamma_j$; $O(1)$ — величина, остающаяся ограниченной при $r \rightarrow \infty$; $\{a_k\}$ — полюсы, $\{b_l\}$ — нули, $\{c_m\}$ — единицы функции $f(z)$, лежащие вне круга $|z| < 1$, рассматриваемые с учетом кратности; $A_{\alpha\beta}(r, f)$, $B_{\alpha\beta}(r, f)$, $C_{\alpha\beta}(r, f)$, $S_{\alpha\beta}(r, f) = A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f) + C_{\alpha\beta}(r, f)$ — величины (всюду $r \geq 1$), введенные Неванлинна ** ⁽³⁾, характеризующие распределение значений функции $f(z)$ в угле $\alpha < \arg z < \beta$. Напомним, что величина $C_{\alpha\beta}(r, f)$ характеризует распределение полюсов $f(z)$ в этом угле, существенным образом учитывая их аргументы. В частности, соотношение $C_{\alpha\beta}(r, f) = O(1)$ эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{\alpha \leq \varphi_k \leq \beta} \left[\sin \frac{\pi}{\gamma} (\varphi_k - \alpha) \right] r_k^{-\pi/\gamma} \quad (a_k = r_k e^{i\varphi_k}).$$

Мы будем использовать следующие результаты.

Теорема А. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условию $\int_1^{\infty} \ln^+ T(r, f) \times r^{-\pi/\gamma-1} dr < \infty$, то для любого конечного набора $q \geq 3$ различных комплексных чисел $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(q)}$ из расширенной плоскости имеет место соотношение ***

$$(q-2) S_{\alpha\beta}(r, f) \leq \sum_{v=1}^q C_{\alpha\beta}(r, (f - a^{(v)})^{-1}) + O(1).$$

* Отметим, что близкое к этому качественное высказывание сформулировано в работе А. А. Гольдберга ⁽²⁾.

** Определения этих величин можно найти также в ⁽⁹⁾.

*** По определению, при $a = \infty$ $C_{\alpha\beta}(r, (f - a^{(v)})^{-1}) = C_{\alpha\beta}(r, f)$.

Теорема Б. Если $S_{0\pi}(r, f) = O(1)$, то существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \int_0^{\pi} \ln |f(re^{i\vartheta})| \sin \vartheta d\vartheta \text{ и имеет место представление}$$

$$\begin{aligned} \ln |f(z)| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \sin \varphi \ln |f(t)|}{r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi} dt + \frac{2\eta}{\pi} r \sin \varphi + \\ &+ \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \ln \left| \frac{z - \bar{a}_k}{z - a_k} \right| - \sum_{\operatorname{Im} b_l > 0} \ln \left| \frac{z - \bar{b}_l}{z - b_l} \right| \quad (z = re^{i\varphi}). \end{aligned} \quad (1)$$

Теоремы А и Б принадлежат Неванлинна⁽³⁾, который в теореме А предполагал вместо нашего условия конечность порядка $f(z)$. Для того бы получить результат в сформулированном нами виде, нужно воспользо-

ваться оценкой $A_{\alpha\beta}(r, f'f^{-1}) = O\left(\int_1^{2r} \ln^+ T(r, f) r^{-\pi/\gamma-1} dr\right)$.

Пусть функция $u(r, \varphi)$ определена при $1 \leq r < \infty$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Если можно указать множество $E \subset [1, \infty)$ конечной логарифмической длины (е. $\int_E d \ln r < \infty$) такое, что $\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in CE}} u(r, \varphi) = h(\varphi)$ существует равномерно

$\varphi, \alpha \leq \varphi \leq \beta$, то условимся говорить, что при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ существует $^{(1)}u(r, \varphi) = h(\varphi)$.

Теорема В. Если функция $f(z)$ представима в виде (1), то при $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ существует $\lim_{r \rightarrow \infty}^{(1)} r^{-1} \ln |f(re^{i\varphi})| = 2\eta\pi^{-1} \sin \varphi$.

Эта теорема является простым следствием результата Хеймана⁽⁴⁾. Отметим, что теоремы Б и В легко обобщаются на случай угла произвольного раствора.

Теорема Г. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

а) по меньшей мере для двух различных значений a из расширенной плоскости и некоторой системы лучей $(R) \sum_{j=1}^n C_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, (f-a)^{-1}) = O(1)$;

б) для некоторого значения a , отличного от тех, которые фигурируют в условии а), положительна величина

$$\Delta^*(a) = \sup_{\mathfrak{B} \in K} \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in \mathfrak{B}}} \frac{m(r, a)}{T(r, f)}$$

то через K обозначен класс множеств, лежащих на положительной оси, с верхней плотностью*, меньшей 1),

и рост $f(z)$ не выше порядка $\pi\theta^{-1}$ и нормального типа.

Эта теорема является частным случаем основного результата заметки⁽⁵⁾.

2⁰. Из сопоставления теорем А, Б и В непосредственно вытекает следующая:

Теорема 1. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) существуют α и β такие, что по меньшей мере для трех различных значений a из расширенной плоскости $C_{\alpha\beta}(r, (f-a)^{-1}) = O(1)$;

2) $\int_1^{\infty} \ln^+ T(r, f) r^{-\pi/\gamma-1} dr < \infty$,

* Верхней плотностью множества $E \subset [1, \infty)$ называется величина $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \operatorname{mes} \{E \cap [1, r)\}$.

то

3) при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ существует $\lim_{r \rightarrow \infty}^{(I)} r^{-\pi/\gamma} \ln |f(re^{i\varphi})| = c \sin \frac{\pi}{\gamma} (\varphi - \alpha)$;

4) сходятся интегралы $\int_1^{\infty} |\ln |f(te^{i\alpha})|| t^{-\pi/\gamma-1} dt$ и $\int_1^{\infty} |\ln |f(te^{i\beta})|| t^{-\pi/\gamma-1} dt$.

Следствие 1. Пусть имеется некоторая система лучей (R) .

Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) по меньшей мере для трех различных значений a из расширенной плоскости $C_{\alpha_j a_{j+1}}(r, (f-a)^{-1}) = O(1)$ ($j = 1, 2, \dots, n$);

2) $\int_1^{\infty} \ln^+ T(r, f) r^{-\pi/\theta-1} dr < \infty$,

то

3) при $\alpha_j \leq \varphi \leq \alpha_{j+1}$ существует $\lim_{r \rightarrow \infty}^{(I)} r^{-\pi/\gamma_j} \ln |f(re^{i\varphi})| = c_j \sin \frac{\pi}{\gamma_j} (\varphi - \alpha_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$);

4) сходятся интегралы $\int_1^{\infty} |\ln |f(te^{i\alpha_j})|| t^{-\pi/\delta_j-1} dt$ ($\delta_j = \max(\gamma_j, \gamma_{j+1})$),

$\gamma_0 = \gamma_n, j = 1, \dots, n$).

Условие 1) можно несколько ослабить, заменив его требованием, что для каждого j найдется такая тройка чисел a из расширенной плоскости, что $C_{\alpha_j a_{j+1}}(r, (f-a)^{-1}) = O(1)$.

3°. В этом пункте мы будем рассматривать функции, имеющие представление

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - a_k}, \quad \sum_{a_k \neq 0} \left| \frac{A_k}{a_k} \right| < \infty. \quad (2)$$

М. В. Келдыш доказал (6), что для таких функций

$$m(r, f) = O(1), \quad (3)$$

откуда легко вытекает, что для любых α и β справедливо $B_{\alpha\beta}(r, f) = o(1)$. Методом, близким к тому, который был использован в (6) для доказательства (3), можно установить, что для функций вида (2) имеет место $A_{\alpha\beta}(r, f) = O(1)$, если $0 < \gamma \leq \pi$. Следовательно, для функций вида (2) всегда

$$S_{\alpha\beta}(r, f) = C_{\alpha\beta}(r, f) + O(1) \quad (0 < \gamma \leq \pi).$$

Из этого соотношения и теорем Б и В вытекает:

Теорема 2. Если функция $f(z)$ представима в виде (2) и при некоторых α и β , $0 < \gamma \leq \pi$, $C_{\alpha\beta}(r, f) = O(1)$, то для $f(z)$ имеют место утверждения теоремы 1, при этом в 3) будем иметь $c \leq 0$.

Следствие 2. Если функция $f(z)$ представима в виде (2) и для некоторой системы лучей (R) с $\Theta \leq \pi$ выполняется $\sum_{j=1}^n C_{\alpha_j a_{j+1}}(r, f) = O(1)$, то для $f(z)$ имеют место утверждения следствия 1 и в 3) будем иметь $c_j \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Этот результат является обобщением одной теоремы М. Г. Крейна (7).

4°. Из теоремы Г следует, что условие 2) следствия 1 можно заменить следующим условием:

2°) Найдется по крайней мере одно значение a (не обязательно отличное от тех, которые фигурируют в условии 1)), для которого положительна величина $\Delta^*(a)$.

Так как для всякой целой функции $\Delta^*(\infty) = 1$, то отсюда следует Теорема 3. Если $f(z)$ — целая функция такая, что по меньшей мере для двух различных значений $a \neq \infty$

$$\sum_{j=1}^n C_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, (f - a^{-1}) = O(1),$$

то для этой функции верны утверждения следствия 1.

Следствие 3. Если $f(z)$ — целая функция, для которой $\sum |\operatorname{Im}(b_l^{-1})| < \infty$, $|\operatorname{Im}(c_m^{-1})| < \infty$, то $f(z)$ — функция экспоненциального типа, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |f(t)||}{1+t^2} dt < \infty.$$

5°. Пользуясь некоторыми результатами Мийу (8), можно несколько усилить результаты 2°, 3° и 4°, введя в рассмотрение, кроме a — точек функции, еще и a — точки ее производных. При этом нужно использовать также некоторые результаты из (5°).

6°. Мы считаем весьма вероятным предположение, что условие 2) теореме 1 является лишним.

Нам кажется, что было бы интересно доказать или опровергнуть возможность замены в следствии 3 условия $\sum |\operatorname{Im}(c_m^{-1})| < \infty$ условием $\Delta^*(1) > 0$ или условием $\Delta^*(1) > 0$. Отметим, что в (5°) было (в частности) установлено, что если $\sum |\operatorname{Im}(b_l^{-1})| < \infty$ и $\Delta^*(1) > 0$, то $f(z)$ — экспоненциального типа.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
21 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. ² А. А. Гольдберг, Изв. Высш. учебн. зав., Математика, № 4, 50 (1959). ³ R. Nevanlinna, Acta Soc. Sci. Fenn., 50, № 12 (1925). ⁴ W. K. Hayman, J. de math. pures et appl., 5, 115 (1956). ⁵ И. В. Островский, ДАН, 120, № 5, 970 (1958). ⁶ М. В. Келдыш, ДАН, 94, № 3, 377 (1954). ⁷ М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, № 4, 309 (1947). ⁸ H. Milloux, Les fonctions méromorphes et leurs dérivées, Paris, 1940. ⁹ И. В. Островский, ДАН, 130, № 5 (1960).

Г. Н. ТЮРИНА

О КОГОМОЛОГИЯХ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 30 XII 1959)

Пусть X — однородное односвязное компактное комплексное многообразие. Обозначим через $H^q(X, \Omega^p)$ или $H^{p,q}(X)$ группу когомологий пространства X с коэффициентами в пучке Ω^p ростков голоморфных p -форм на X и положим $H''(X) = \sum H^{p,q}(X)$. В случае, когда X — келерово многообразие, имеем ⁽¹⁾ *

$$\begin{aligned} H^q(X, \Omega^p) &= 0 \quad \text{при } p \neq q; \\ H^p(X, \Omega^p) &= H^{2p}(X, \mathbb{C}). \end{aligned} \tag{1}$$

Для общего случая известна формула Ботта ⁽²⁾, сводящая группу $H^{p,q}(X)$ к группам когомологий некоторых алгебр Ли.

Каждому некелерову однородному многообразию можно однозначно сопоставить некоторое келерово многообразие Y . При этом существует расслоение $X \rightarrow Y$, слоем которого является тор T^{2n} размерности $2n$. В настоящей работе доказывается, что $H''(X)$ изоморфна как биградуированное пространство группе гомологий алгебры $H^*(Y, \mathbb{C}) \otimes H^*(T^{2n}, \mathbb{C})$, снабженной некоторым дифференциалом и некоторой биградуировкой. На многообразии X указанного вида транзитивно действует полупростая комплексная группа G и ее максимальная компактная подгруппа M , так что $X = G/U = M/V$; $V = M \cap U$. Обозначим через $\mathfrak{g}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ — алгебры Ли групп G, U, V , а через \mathfrak{v}^c — комплексную оболочку алгебры \mathfrak{v} . Пусть S' — некоторое подмножество системы S простых корней алгебры \mathfrak{g} , а $[S']$ — порожденное им множество положительных корней. Обозначим через $\mathfrak{v}(S')$ подалгебру в \mathfrak{g} , порожденную всеми такими корневыми векторами e_α , что α или $-\alpha \in [S']$, и через $\mathfrak{h}(S')$ — ортогональное дополнение к подпространству, натянутому на $[S']$ в картановской подалгебре, а через $\mathfrak{n}(S')$ — подалгебру, натянутую на такие e_α , что $\alpha > 0$ и $\alpha \notin [S']$. Ван показал ⁽³⁾, что для любого многообразия X рассматриваемого типа существуют такое $S' \subset S$, такое разложение $\mathfrak{h}(S') = \mathfrak{h}_v + \mathfrak{h}_c$, где \mathfrak{h}_v и \mathfrak{h}_c — рациональные подпространства, и такое комплексное подпространство $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{h}_c$, $\mathfrak{w} + \overline{\mathfrak{w}} = \mathfrak{h}_c$, что

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{v}(S') + \mathfrak{h}_v + \mathfrak{w} + \mathfrak{n}(S'),$$

$$\mathfrak{v}^c = \mathfrak{v}(S') + \mathfrak{h}_v.$$

Положим

$$[\mathfrak{u}] = \mathfrak{u} + \overline{\mathfrak{w}}$$

* Через $H^k(X, \mathbb{C})$ мы обозначаем группы когомологий пространства X с коэффициентами в поле комплексных чисел \mathbb{C} .

обозначим через $[U]$ связную комплексную подгруппу группы G , отвечающую этой подалгебре. Тогда из результатов Вана ⁽³⁾ следует, что $\bar{G} = G/[U]$ — односвязное компактное келерово многообразие. Обозначим через $[v]$ алгебру Ли группы $[V] = [U] \cap M$. Имеем

$$[v]^c = v^c + \mathfrak{h}_c.$$

Заметим, что при выборе различных $\mathfrak{w} \subset \mathfrak{h}_c$ на X могут индуцироваться расслоением (G, X, U) различные комплексные структуры.

Сформулируем основной результат.

Пространство $\bar{\mathfrak{w}}$ содержится в центре алгебры $[v]^c$. Поэтому сопряженное пространство $\bar{\mathfrak{w}}^*$ отождествляется с подпространством пространства $\mathcal{U}^1([V], C)$. Трансгрессия в главном расслоенном пространстве $(M, Y, [V])$ индуцирует линейное отображение $\tau: \bar{\mathfrak{w}}^* \rightarrow H^2(Y, C)$. Рассмотрим алгебру

$$\theta = \wedge \bar{\mathfrak{w}}^* \otimes H(Y, C) \otimes \wedge \mathfrak{w}^*$$

такой двойной градуировкой, что элементы из $\wedge^l \bar{\mathfrak{w}}^* \otimes 1 \otimes 1$ имеют бистепень $(l, 0)$, элементы из $1 \otimes H^{2p}(Y, C) \otimes 1$ — бистепень (p, p) и элементы из $1 \otimes 1 \otimes \wedge^m \mathfrak{w}^*$ — бистепень $(0, m)$, и определим в ней дифференциал δ , для которого

$$\delta \mathfrak{w}^* = \delta H(Y) = 0, \quad \delta = \tau \text{ на } \bar{\mathfrak{w}}^*.$$

Теорема. *Группа $H^n(X)$, как биградуированное пространство, изоморфна $H(\theta) = \wedge \mathfrak{w} \otimes H(H(Y, C) \otimes \wedge \bar{\mathfrak{w}}^*)$.*

При доказательстве теоремы исходим из формулы Ботта ⁽²⁾

$$H^q(X, \Omega^p) = H^q(\mathfrak{u}, v^c, \wedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{u})^*),$$

где в правой части стоит группа когомологий алгебры Ли \mathfrak{u} относительно подалгебры v^c с коэффициентами в представлении алгебры \mathfrak{u} в пространстве $\wedge(\mathfrak{g}/\mathfrak{u})^*$, индуцированном присоединенным представлением. Отождествим пространство $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{g}/[\mathfrak{u}]$ с дополнениями $\bar{\mathfrak{n}}_* = \bar{\mathfrak{n}}(S') + \bar{\mathfrak{w}}$ и $\bar{\mathfrak{n}}(S')$ к \mathfrak{u} и $[\mathfrak{u}]$ в алгебре \mathfrak{g} .

Тогда имеем

$$\wedge(\bar{\mathfrak{n}}_*)^* = \wedge(\bar{\mathfrak{n}}(S'))^* \otimes \wedge \bar{\mathfrak{w}}^*,$$

причем операторы из $[\mathfrak{u}]$ действуют на $\wedge \bar{\mathfrak{w}}^*$ тривиально, а на $\wedge \bar{\mathfrak{n}}(S')^*$ их действие индуцируется присоединенным представлением \mathfrak{u} в \mathfrak{g} .

Будем обозначать через $C(L, L', P)$ алгебру относительных коцепей алгебры Ли L по подалгебре L' с коэффициентами в представлении P , через d — дифференциал в этой алгебре.

Пусть $A = C(\mathfrak{u}, v^c, \wedge(\bar{\mathfrak{n}}_*)^*)$ и $B = C(\mathfrak{u}, v^c, \wedge \bar{\mathfrak{n}}(S')^*)$.

Имеем

$$A = B \otimes \wedge \bar{\mathfrak{w}}^*.$$

Пусть $x \in \bar{\mathfrak{w}}^* \subset A$. Вычислим dx . Для этого выберем в \mathfrak{g} базис из корневых векторов и корней. Тогда, по определению дифференциала в A ⁽⁴⁾, элемент $[dx(e_\alpha)](e_{-\beta})$, где $e_\alpha \in \bar{\mathfrak{n}}(S')$, $e_{-\beta} \in \bar{\mathfrak{n}}(S')$, равен 0, если $\alpha \neq \beta$, и равен $x(\alpha)$, если $\alpha = \beta$. Очевидно, что $[dx](h) = 0$, $h \in \bar{\mathfrak{w}}$ и $dx(h) = 0$, $e \in \bar{\mathfrak{w}}$. Вычислим $H(B)$. Как следует из ⁽²⁾, градуированная алгебра, ассоциированная с $H(B)$, изоморфна члену $'E_\infty$ некоторой спектральной последовательности, в которой $'E_2^q = \sum H^{p,q}(Y, C) \otimes \wedge \mathfrak{w}^*$. Из соображений размерности и в силу (1) $'E_2 = 'E_\infty^p$ и алгебра E_∞ изоморфна алгебре $H(B)$. При помощи обычной фильтрации алгебры A по степени в алгебре B построим когомологическую спектральную последовательность (E_r, d_r) .

При этом $E_2 = \wedge \bar{w}^* \otimes H(B) = \wedge w^* \otimes H(Y, C) \otimes \wedge \bar{w}^*$, а элемент $d_r x$, где $x \in \bar{w}^*$, принадлежит $H(B)$ и равен классу когомологий цикла dx . Можно доказать, что в данной спектральной последовательности дифференциалы d_r ($r > 2$) тривиальны. Таким образом,

$$H(A) = H(\wedge \bar{w}^* \otimes H(Y, C)) \otimes \wedge w^*,$$

причем дифференциал δ , относительно которого берется группа гомологий, индуцирован вычисленным выше дифференциалом d . Остается вычислить δ . Положим $D = C([u], [v]^c, \wedge \bar{n}(S'))$. Как было показано, $d\bar{w}^* \subset D^{1,1}$. Определим отображение $P: D^{p,q} \rightarrow C^{p+q}(g, [v]^c, c)$ следующим образом:

$$Pf(x_1, \dots, x_{p+q}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_p \in [u], \\ [f(x_1, \dots, x_p)](\hat{x}_{p+1}, \dots, \hat{x}_{p+q}), & \text{если } x_p \in [u], \end{cases}$$

где x_i расположены так, что если $x_i \in [u]$, то и $x_j \in [u]$ при $j > i$, а \hat{x}_k равен классу смежности элемента x_k в пространстве $g/[u]$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} D^{p,q}(Y) & \xrightarrow{P} & C^{p+q}(Y) \\ \sigma'' \downarrow & & \downarrow \sigma'' \\ I^{p,q}(Y) & \xrightarrow{i} & I^{p+q}(Y) \end{array}$$

где $I^{p,q}(I^r)$ — инвариантные формы на Y бистепени (p, q) (степени r), σ — известное отождествление⁽⁴⁾, i — очевидное вложение. Можно проверить сохранение бистепени при отображении σ , следовательно, можно определить $\sigma'' = i^{-1} \sigma P$. Легко проверить, непосредственно сравнив соответствующие формулы, что $\sigma'' d = d'' \sigma''$, где d — дифференциал в алгебре A , а d'' — дифференцирование по \bar{z} в $I(Y)^*$.

Так как многообразие Y келерово, то известно⁽⁵⁾, что при переходе к алгебрам когомологий в $I^{p,q}(Y)$ и в $I^{p+q}(Y)$ отображение i индуцирует изоморфизм алгебр $H''(Y)$ и $H(Y, C)$. Поэтому отображение P также индуцирует изоморфизм P^* алгебр $H''(Y)$ и $H(Y, C)$, сосчитанных при помощи комплексов D и $C(g, [v], C)$.

Как отмечалось выше, \bar{w}^* отождествляется с подпространствами $j\bar{w}^*$ и $j^*\bar{w}^*$ пространств $C^1([v]^c)$ и $H^1([v]^c)$. Пусть $x \in \bar{w}^*$, тогда $jx \in C^1([v]^c) \subset C(g)$ и \bar{d} — дифференциал в последней группе. Тогда $(\bar{d}x)(e_\alpha, e_\beta)$ равен нулю, если $\alpha + \beta \neq 0$, и равен $x(\alpha)$, если $\alpha + \beta = 0$. Сравнив эту формулу с вычисленным выше значением dx в алгебре A , убеждаемся, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \wedge^1 \bar{w}^* & \xrightarrow{j} & C^1([v]^c) \\ d \downarrow & & \downarrow \bar{d} \\ D^{1,1} & \xrightarrow{P} & C^2(g, [v]^c, C) \end{array}$$

коммутативна. При переходе в нижней строке к группам когомологий получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \wedge^1 \bar{w}^* & \xrightarrow{j^*} & H^1([v], C) \\ d_2 \downarrow & & \downarrow \tau \\ H^{1,1}(Y) & \xrightarrow{P^*} & H^2(Y, C), \end{array}$$

* Эта конструкция применима и к исходному многообразию X , из нее непосредственно следует, что $H(u, v^c, \wedge (g/u)^*)$ изоморфна алгебре d'' -гомологий алгебры инвариантных форм на многообразии X . Поэтому формула Ботта эквивалентна утверждению, что $H''(X)$ можно вычислять при помощи инвариантных форм на X .

ричем P^* — изоморфизм, d_2 — второй дифференциал в спектральной последовательности (E_r, d_r) , определенной выше, а τ — трансгрессия в расслоенном пространстве $(M, Y, [V])$. Отобразим алгебру $E_2 \wedge \bar{w}^* \otimes H^*(Y) \otimes \wedge w^*$ алгебру $\theta = \wedge \bar{w}^* \otimes H(Y, C) \otimes \wedge w^*$ при помощи $1 \otimes P^* \otimes 1$. Этот изоморфизм переводит d_2 в дифференциал τ алгебры θ и индуцирует изоморфизм групп $H(A)$ и $H(\theta)$. Теорема доказана.

Следствие. $H^q(X, \mathfrak{O})$ — группа когомологий пространства X с коэффициентами в пучке ростков аналитических функций — изоморфна $\wedge^q \bar{w}^*$.

В качестве примера рассмотрим пространство $SU(3)$, снабженное левоинвариантной комплексной структурой. Пусть $P(X, s, t) = \sum \dim H^{p,q}(X) s^q t^p$. В зависимости от выбора комплексной структуры на $SU(3)$ многочлен $P(SU(3), s, t)$ будет равен или $(1 + st)(1 + s^2 t^3)(1 + s)$ или $(1 + st^2)(1 + st + s^2 t^2)(1 + s)$. Этот пример был разобран Боттом ⁽²⁾, но полученные им значения $\dim H^{p,q}(SU(3))$ не совпадают с вычисленными выше.

В заключение автор выражает свою признательность А. Л. Онищику, руководившему этой работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ A. Borel, F. Hirzebruch, Am. J. Math., 80, 458 (1958). ² R. Bott, Ann. Math., 66, № 2 (1957). ³ H. C. Wang, Am. J. Math., 76, 1 (1954). ⁴ C. Chevalley, S. Eilenberg, Trans. Am. Math. Soc., 63, № 1 (1948). ⁵ P. Dolbeault, C. R., 236, 175 (1953).

В. Я. УРМ

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 31 XII 1959)

В настоящей заметке исследуется вопрос об асимптотическом поведении решений разностных уравнений в классе последовательностей, суммируемых с квадратом. Подобные вопросы разбирались в классе обобщенных функций А. И. Жуковым⁽¹⁾. Однако существуют примеры, когда полученные им асимптотические решения не принадлежат к рассматриваемому нами классу.

Рассмотрим разностное уравнение

$$u_k^{n+1} = \sum_p c_{p-k} u_p^n, \quad (1)$$

для которого имеет место разностный аналог задачи Коши.

Предположим, что начальные данные u_k^0 и коэффициенты c_k разностной схемы (1) принадлежат классу l_2 . Введем обозначение

$$U^n(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k^n \exp[iks]. \quad (2)$$

Как известно⁽²⁾, ряд (2) сходится и функция $U^n(s)$ принадлежит классу $L_2(-\pi, +\pi)$.

При помощи (2) уравнению (1) ставим в соответствие выражение

$$U^n(s) = \lambda^n(s) U^0(s), \quad (3)$$

где $U^0(s)$ и $\lambda(s)$ принадлежат классу $L_2(-\pi, +\pi)$.

Назовем уравнение (1) устойчивым⁽³⁾, если

$$\sum_k |u_k^n|^2 \leq M \sum_k |u_k^0|^2, \quad (4)$$

где $M > 0$ — не зависящая от n константа.

Неравенству (4) эквивалентно неравенство

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |U^n(s)|^2 ds \leq M \int_{-\pi}^{+\pi} |U^0(s)|^2 ds. \quad (5)$$

Из (3) нетрудно заключить, что для выполнения (5) при любых начальных данных u_k^0 необходимо и достаточно выполнение условия

$$|\lambda(s)| \leq 1. \quad (6)$$

Решение (1) может быть представлено в виде

$$u_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lambda^n(s) U^0(s) \exp[-iks] ds. \quad (7)$$

Пусть $\lambda(s)$ удовлетворяет условиям:

$$\lambda(0) = 1, \quad |\lambda(s)| < 1 \quad \text{при } s \neq 0 \quad (8)$$

существует некоторая окрестность $s=0$, $-\alpha \leq s \leq \alpha$, в которой $\lambda(s)$ представимо в виде

$$\lambda(s) = \exp \left[i \sum_{l=1}^{2p-1} \rho_l s^l - \beta_{2p} s^{2p} + \beta_{2p+1} s^{2p+1} v(s) \right], \quad (9)$$

где $\beta_{2p} > 0$, а $v(s)$ — аналитическая в указанной окрестности функция.

Пусть

$$u_k^{(1)n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \lambda^n(s) U^0(s) \exp[-iks] ds; \quad (10)$$

тогда из (8) следует, что

$$\sum_k |u_k^n - u_k^{(1)n}|^2 \leq M_1 q^n, \quad (11)$$

где $q \leq q_0 < 1$, а M_1 — не зависящая от n константа.

Нетрудно убедиться, что можно так сузить окрестность $s=0$, чтобы выполнялось неравенство.

$$|\lambda(s)| \leq \exp[-\beta s^{2p}], \quad (12)$$

где $\beta > 0$.

Пусть теперь

$$u_k^{(2)n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \exp \left[i n \sum_{l=1}^{2p-1} \beta_l s^l - n \beta_{2p} s^{2p} \right] U^0(s) \exp[-iks] ds. \quad (13)$$

Постараемся выяснить поведение выражения

$$\sum_k |u_k^n - u_k^{(2)n}|^2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Выбираем последовательность ε_n , скорость убывания которой определим позднее. Пусть

$$\bar{u}_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon_n}^{+\varepsilon_n} \lambda^n(s) U^0(s) \exp[-iks] ds; \quad (14)$$

тогда в силу (12)

$$\sum_k |u_k^{(1)n} - \bar{u}_k^n|^2 \leq M_2 \exp[-2\beta n \varepsilon_n^{2p}]. \quad (15)$$

Потребуем теперь, чтобы $n \varepsilon_n^{2p} = n^{\delta \cdot 2p}$, $\delta > 0$. Тогда $\varepsilon_n = n^{-1/2p + \delta}$ и $\delta < 1/2p$. При таком выборе δ видим, что ошибка (15) убывает с ростом n как показательная функция.

Пусть теперь

$$\bar{\bar{u}}_k^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon_n}^{+\varepsilon_n} \exp \left[i n \sum_{l=1}^{2p-1} \beta_l s^l - n \beta_{2p} s^{2p} \right] U^0(s) \exp[-iks] ds. \quad (16)$$

Оценим

$$\sum_k |\bar{u}_k^n - \bar{\bar{u}}_k^n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon_n}^{+\varepsilon_n} \left| \lambda^n(s) - \exp \left[in \sum_{l=1}^{2p-1} \beta_l s^l - n\beta_{2p} s^{2p} \right] \right|^2 |U^0(s)|^2 ds. \quad (17)$$

Заметим, что квадрат разности в (17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left| \lambda^n(s) - \exp \left[in \sum_{l=1}^{2p-1} \beta_l s^l - n\beta_{2p} s^{2p} \right] \right|^2 = \\ & = \beta_{2p+1}^2 n^2 s^2 \left| (2p+1) \xi^{2p} v(\xi) + \xi^{2p+1} v'(\xi) \right|^2 \times \\ & \times \left| \exp [2n\beta_{2p+1} \xi^{2p+1} v(\xi)] \right| \exp [-2n\beta_{2p} s^{2p}], \end{aligned} \quad (18)$$

где ξ заключено между $-\varepsilon_n$ и $+\varepsilon_n$.

Потребуем, чтобы $n\varepsilon_n^{2p+1} \rightarrow 0$. Для этого следует распорядиться параметром δ так, чтобы $\delta < 1/2p(2p+1)$. Отсюда заключаем, что

$$\sum_k |\bar{u}_k^n - \bar{\bar{u}}_k^n|^2 \leq M_s n^2 \int_{-\varepsilon_n}^{+\varepsilon_n} s^{2\xi_{4p}} \exp [-2n\beta_{2p} s^{2p}] ds \leq M_4 n^{-3/2p+(4p+1)\delta}. \quad (19)$$

Замечая при этом, что $\sum |u_k^n|^2$ и $\sum |\bar{u}_k^n|^2$ имеют порядок роста $n^{-1/2p}$ видим, что

$$\sum |u_k^n - \bar{u}_k^n|^{(2)} \leq M_5 n^{-3/2p+(4p+1)\delta}, \quad (20)$$

т. е. ошибка стремится к нулю быстрее, чем убывают сами исследуемые величины.

Рассмотрим несколько примеров разностных схем и выпишем для них асимптотические формулы:

Пример 1.

$$u_k^{n+1} = \frac{u_{k+1}^n + u_{k-1}^n}{2} + \frac{\tau}{2h} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n). \quad (21)$$

Для этой разностной схемы условия (8) выполняются, если

$$r = \frac{\tau}{n} \leq 1.$$

Асимптотическое решение имеет вид

$$u_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left[inrs - n \frac{1-r^2}{2} s^2 \right] U^0(s) \exp [-iks] ds. \quad (22)$$

Пример 2.

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{r}{2} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{r^2}{2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n). \quad (23)$$

Условия (8) те же, что и в предыдущем примере.

Асимптотическое решение (23) имеет вид

$$u_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \exp \left[inrs + in \frac{r}{6} (1-r) s^3 - n \frac{1}{8} r^2 (1-r^2) s^4 \right] U^0(s) \exp [-iks] ds. \quad (24)$$

Как следует из статьи А. И. Жукова⁽¹⁾, в примере 2 может быть получена асимптотическая формула в смысле сходимости в классе обобщенных функций

$$\tilde{u}_k^n = \frac{1}{2\pi^3 \sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left[\frac{nr+k}{\sqrt{n}} s + \frac{r}{6} (1-r) s^3 \right] ds, \quad U^0(s) = 1. \quad (25)$$

Однако нетрудно видеть, что \tilde{u}_k^n не принадлежит классу l_2 .

В заключение автор считает своим приятным долгом принести благодарность А. Д. Соловьеву и С. К. Годунову за внимание и многочисленные указания.

Поступило
28 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Жуков, УМН, 14, в. 3, 129 (1959). ² Е. Титчмарш, Теория функций, М.—Л., 1951. ³ В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956.

С. В. УСПЕНСКИЙ

СВОЙСТВА КЛАССОВ W_p^r С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 23 XII 1959)

Эта работа представляет собой дальнейшее развитие результатов, опубликованных в нашей работе (1).

Пусть g — область в пространстве R_n ; R_m — m -мерное подпространство точек $(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, где x_{m+1}, \dots, x_n фиксированы.

Функция f принадлежит классу $W_p^r(g)$, $1 < p < \infty$, при $r = \bar{r} + \alpha$, где \bar{r} целое, $0 < \alpha < 1$, если:

1) f принадлежит классу Соболева $W_p^{\bar{r}}(g)$;

$$2) \quad \|f^{\bar{r}}\|_{W_p^{\alpha}(g)} = \iint_g \frac{|f^{\bar{r}}(x_1, \dots, x_n) - f^{\bar{r}}(y_1, \dots, y_n)|^p}{|x - y|^{n+p\alpha}} dg_x dg_y < \infty,$$

где $|x - y| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Положим

$$\|f\|_{W_p^r(g)} = \|f\|_{W_p^{\bar{r}}(g)} + \sum \|f^{\bar{r}}\|_{W_p^{\alpha}(g)}.$$

Следующие теоремы для классов $W_p^r(R_n)$ аналогичны соответствующим теоремам для классов H_p^r С. М. Никольского (2).

Теорема 1 (прямая). Пусть $f \in W_p^r(R_n)$, $1 \leq m < n$, $\lambda_j \geq 0$, $\rho = r - \frac{(n-m)}{p} - \sum_{j=m+1}^n \lambda_j > 0$. Тогда частная производная

$$\phi(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial x_n^{\lambda_n}}$$

как функция x_1, \dots, x_m при любых фиксированных x_{m+1}, \dots, x_n принадлежит $W_p^{\rho}(R_m)$ (ρ — нецелое при $p > 2$),

$$\|f\|_{W_p^{\rho}(R_m)} \leq c \|f\|_{W_p^r(R_n)},$$

где c не зависит от f .

Теорема 2 (обратная). Задано число $r > 0$ и все возможные системы $\{\lambda\}$ неотрицательных чисел $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$, для которых

$$\rho^\lambda = r - \frac{(n-m)}{p} - \sum_{j=m+1}^n \lambda_j \geq 0.$$

Пусть каждой системе $\{\lambda\}$ приведена в соответствие функция $\varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m)$, принадлежащая $W_p^0(R_m)$ (p — нецелое при $1 < p < 2$).

Тогда можно построить функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in W_p^r(R_n)$ такую, что

$$\left. \frac{\partial^{\lambda_{m+1} + \dots + \lambda_n} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} \right|_{R_m} = \varphi_\lambda(x_1, \dots, x_m),$$

$$\|f\|_{W_p^r(R_n)} \leq c \sum_{\{\lambda\}} \|\varphi_\lambda\|_{W_p^0(R_m)}.$$

Теоремы 1 и 2 при $p = 2$ принадлежат Л. Н. Слободецкому⁽⁷⁾.

С. М. Никольским⁽⁸⁾ и В. М. Бабич была получена теорема о продолжении классов W_p^r (r — целое) с ограниченной области g на все пространство R_n . Следующая теорема обобщает этот результат на случай, когда r дробное (при $p = 2$ она принадлежит Л. Н. Слободецкому).

Теорема 3. Если $f \in W_p^r(G)$, G ограничена, то, каково бы ни было $\eta > 0$, существует функция $F \in W_p^r(R_n)$ и такая, что

$$F|_{G_\eta} = f, \quad \|F\|_{W_p^r(R_n)} \leq c \|f\|_{W_p^r(G)},$$

где c зависит только от η .

Если граница Λ области G достаточно гладкая ($\Lambda \in C^{(\bar{r}+1)}$), то η можно положить равной 0.

При помощи этой теоремы известными методами, предложенными С. М. Никольским⁽²⁾, теоремы 1 и 2, а также все теоремы нашей работы⁽¹⁾ переносятся на ограниченные области G с достаточно гладкой границей.

Определение. Пусть G — n -мерная ограниченная область, Λ_m — достаточно гладкая ее m -мерная граница. Будем считать, что функция $\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_n)$, определенная на G , удовлетворяет неравенству

$$c_1 \rho(x, \Lambda_m) \leq \sigma(x) \leq c_2 \rho(x, \Lambda_m),$$

где $\rho(x, \Lambda_m)$ — расстояние от точки x до Λ_m ; c_1, c_2 — константы, зависящие только от области G . Будем говорить, что функция $f = f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу $W_{p, \alpha}^r(g, \Lambda_m)$, если она определена на G , имеет на G все обобщенные частные производные до порядка r (r — целое) включительно,

$$\|f\|_{W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)} = \sum_{l=0}^r \int_G \sigma^\alpha \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = l} \left| \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dg < \infty, \quad -k < \alpha < pr.$$

Такие классы рассматривались в работах⁽⁴⁻⁶⁾ и др.

Л. Д. Кудрявцевым были получены теоремы продолжения и вложения классов $W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)$ в $H_p^r(G)$. Ниже формулируются теоремы о продолжении и вложении классов $W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)$ в $W_p^r(G)$, которые обобщают результаты А. А. Вашарина⁽⁵⁾ и П. И. Лизоркина⁽⁶⁾.

Теорема 4. Пусть $f \in W_p^r(\Lambda_m)$ (r — нецелое при $1 < p < 2$), $\Lambda_m \in C^{l+1}$, $l > r$. Тогда существует такая функция F , определенная на G , что

$$F|_{\Lambda_m} = f, \quad F \in W_{p, p(l-r)-k}^l(G, \Lambda_m),$$

$$\|F\|_{W_{p, p(l-r)-k}^l(G, \Lambda_m)} \leq c \|f\|_{W_p^r(\Lambda_m)}.$$

Теорема 5. Пусть $f \in W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)$ и пусть Λ_k — k -мерное, достаточно гладкое замкнутое многообразие, принадлежащее \bar{G} . Тогда, если

$$\rho = r - \frac{(n-k)}{p} - \sum_{i=1}^n \lambda_i - \frac{\alpha}{p} > 0, \quad 1 \leq k < n,$$

то

$$\left. \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\lambda_1} \dots \partial x_n^{\lambda_n}} \right|_{\Lambda_k} = \phi(\Lambda_k) \in W_p^\rho(\Lambda_k)$$

(ρ — нецелое при $p > 2$),

$$\|\phi\|_{W_p^\rho(\Lambda_k)} \leq c \|f\|_{W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)}.$$

А. А. Васькинским теоремы 4 и 5 получены при $p = 2$ и $m = k = n-1$.
П. И. Лизоркиным при $0 \leq r < 1$, $m = k = n-1$, $1 < p < \infty$.

Теорема 6. Пусть $f \in W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)$, $\Lambda_m \in C^{r+1}$.

Тогда $f \in W_p^{r-\alpha/p}(G)$ ($\alpha \geq 0$) и $f \in W_p^r(G)$ ($\alpha < 0$),

$$\|f\|_{W_p^{r-\alpha/p}(G)} \leq c \|f\|_{W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)}.$$

Теорема 7. Пусть $f \in W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)$, $\Lambda_m \in C^{r+1}$. Тогда, если

$$\alpha - vp > -k, \quad v = 1, 2, \dots, r,$$

то

$$f \in W_{p, \alpha - vp}^{r-v}(G, \Lambda_m),$$

$$\|f\|_{W_{p, \alpha - vp}^{r-v}(G, \Lambda_m)} \leq c \|f\|_{W_{p, \alpha}^r(G, \Lambda_m)},$$

$$\int_{\Lambda_m} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r-v} \left| \frac{\partial^{r-v} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p d\Lambda_m = o(\rho^{-(\alpha - vp + k)}).$$

Эта теорема усиливает соответствующую теорему Л. Д. Кудряцева в работе (4)*.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
10 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. В. Успенский, ДАН, 130, № 5 (1950). ² С. М. Никольский, Матем. сборн., 33 (75), 261 (1953). ³ С. М. Никольский, ДАН, 88, 409 (1953).
⁴ Л. Д. Кудряцев, Продолжение функций и вложение классов функций. Докторская диссертация, Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 1956. ⁵ А. А. Васькин, ДАН, 117, № 5 (1957). ⁶ П. И. Лизоркин, ДАН, 126, № 4 (1959).
⁷ Л. Н. Слободецкий, ДАН, 118, № 2 (1958).

* Данная работа возникла в результате участия в семинаре В. И. Кондрашова, Л. Д. Кудряцева и С. М. Никольского. При подготовке работы к печати стало известно, что независимо и одновременно теорема 6, теорема 5 при p нецелом и $m = k$, а также теорема 2 при p нецелом и теорема 4 при r нецелом были получены другим участником семинара П. И. Лизоркиным.

М. В. ФЕДОРЮК

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ КОРРЕКТНЫХ ПО ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМ
С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ ПРИ $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow \infty$

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XII 1959)

В настоящей заметке рассматривается задача Коши для корректных по Петровскому уравнений и систем с двумя переменными t, x с коэффициентами, зависящими от t . Для функции Грина задачи Коши найдена ее асимптотика при $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow \infty$; полученная асимптотика справедлива также при $t \rightarrow +0$, x фиксированном и при $x \rightarrow \infty$, $t > 0$, фиксированном.

1. Рассмотрим вначале одно уравнение порядка n с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)u, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2)$$

Введем следующую терминологию:

1°. Уравнение (1) параболично по Петровскому, если $P(s) = a_0 s^n + \dots$, $\operatorname{Re} a_0 < 0$, n четно.

2°. Уравнение (1) собственно параболично по Шилову, если $P(s) = a_0 s^n + \dots + a_{n-p} s^p + \dots$, $\operatorname{Re} a_0 = \operatorname{Re} a_1 = \dots = \operatorname{Re} a_{n-p-1} = 0$, $\operatorname{Re} a_{n-p} < 0$, p четно, $n > p \geq 2$.

3°. Уравнение собственно корректно по Петровскому, если $P(s) = iQ(s)$, где $Q(s)$ — многочлен с вещественными коэффициентами.

Результаты сведены в табл. 1 ($n > 1$).

Примечания к таблице

$$A(x, t) = \frac{C_0}{t^{\frac{1}{2(n-1)}} |x|^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} \left[1 + O\left(\frac{t^{\frac{1}{n-1}}}{|x|^{\frac{1}{n-1}}}\right) \right]$$

се константы, входящие в таблицу, вещественны; $iO(|x|)$ — чисто мнимая величина. Класс корректности понимается следующим образом; при $0 < t \leq T$ решение $u(x, t)$ является классическим решением (1); непрерывная зависимость решения от начальных данных понимается в смысле (2).

При достаточно малых T , $0 \leq t \leq T$ в случаях I, II решение $u(x, t)$ принадлежит тому же классу с заменой b_0 на любое $b'_0 > b_0$. В случае I, 1° и в случае III, 2° на соответствующей полуоси решение задачи Коши есть функция степенного роста порядка роста $\leq +l$.

Асимптотика производных функций Грина выражается через асимптотику функций Грина следующим образом:

$$\frac{\partial^r G}{\partial t^r} \sim C_r \left(\frac{|x|}{t}\right)^{\frac{nr}{n-1}} G(x, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^r G}{\partial x^r} \sim D_r \left(\frac{|x|}{t}\right)^{\frac{r}{n-1}} G(x, t). \quad (4)$$

	Функция Грина	Класс корректности	Не класс корректности
I Параболические по Петровскому	$ x \rightarrow \infty$	$G(x, t) = A(x, t) \times$ $\times \exp \left[-(C_1 + iC_2) \frac{ x ^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}}} + O(x) \right], C_1 > 0$	$ u_0(x) \leq C \exp \left[b_0 x ^{\frac{n}{n-1}} + \delta \right], \delta > 0$
	1°. n чётно, $ x \rightarrow \infty$	$G(x, t) = A(x, t) \exp \left[iC_1 \frac{ x ^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}}} + iO(x) - \right.$ $\left. - C_2 x ^{\frac{p}{n-1}} \frac{n-p-1}{t^{\frac{n-p-1}{n-1}}} + O\left(x ^{\frac{n-p}{n-1}} \frac{1}{t^{\frac{n-p}{n-1}}}\right) \right],$ $C_2 > 0$	$ u_0(x) \leq C \exp \left[\alpha x ^{\frac{p}{n-1}} \right], \alpha > 0$
II Собственно параболическое по Шилову	2°. n нечётно. а) $x \rightarrow +\infty \times$ $\times \text{sign}(\text{Im } a_0)$	а) $G(x, t) = A(x, t) \sin \left(C_2 \frac{ x ^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}}} \right) \times$ $\times \exp \left[-C_2 x ^{\frac{p}{n-1}} \frac{n-p-1}{t^{\frac{n-p-1}{n-1}}} + iO(x) \right] +$ $+ O\left(x ^{\frac{p-1}{n-1}} \frac{n-p}{t^{\frac{n-p}{n-1}}}\right), C_2 > 0$	$ u_0(x) \leq C \exp \left[b_0 x ^{\frac{n}{n-1}} + \delta \right], \delta > 0,$ $\text{sign } x = -\text{sign}(\text{Im } a_0)$
	б) $x \rightarrow -\infty \times$ $\times \text{sign}(\text{Im } a_0)$	б) $G(x, t) = \exp \left[-C_1 \frac{ x ^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}}} + O(x) \right] \times$ $\times \sin \left(C_3 + C_4 \frac{ x ^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{n}{n-1}}} \right) A(x, t),$ $C_1 \geq 0$	или $ u_0(x) \leq C \exp \left[\alpha x ^{\frac{p}{n-1}} \right], \alpha > 0,$ $\text{sign } x = \text{sign}(\text{Im } a_0)$

$10. n$ четно, $ x \rightarrow \infty$	$G(x, t) = A(x, t) \exp \left[iC_1 \frac{ x ^{\frac{n-1}{2}}}{t^{\frac{n-1}{2}}} + iO(x) \right]$	$ u_0^{(k)}(x) \leq C_k [x + 1]^l$ $k \geq nl + [n/2] + 1$	$ u_0(x) < C e^{ x ^a}, a > 0$
$20. n$ нечетно. а) $x \rightarrow +\infty \times \text{sign}(\text{Im } a_0)$ б) $x \rightarrow -\infty \times \text{sign}(\text{Im } a_0)$	а) $G(x, t) = A(x, t) \sin \left(C_1 \frac{ x ^{\frac{n-1}{2}}}{t^{\frac{n-1}{2}}} \right)$ б) $G(x, t) = A(x, t) \exp \left[-C_1 \frac{ x ^{\frac{n-1}{2}}}{t^{\frac{n-1}{2}}} + O(x) \right], C_1 > 0$	$ u_0^{(k)}(x) \leq C_k [x + 1]^l$ $k \geq nl + [n/2] + 1,$ $\text{sign } x = \text{sign}(\text{Im } a_0),$ или $ u_0(x) < C \exp \left[b x ^{\frac{n}{n-1} + \delta} \right], \delta > 0$ $\text{sign } x = -\text{sign}(\text{Im } a_0)$	Тот же, что и III, 1^0 , если $\text{sign } x = \text{sign}(\text{Im } a_0)$

Собственно корректные по Петровскому

Заметим также, что функция Грина при $t > 0$, x фиксированном является целой функцией x .

Асимптотика функции Грина ранее была неизвестна, но для параболических по Петровскому уравнений была известна ее точная оценка (см., например, (1)).

Классы корректности I и II, 1^0 были известны ранее (2); для случая II, 2^0 был получен тот же класс корректности, что и для II, 1^0 . Таким образом, в случаях II, 2^0 и III, 2^0 полученные классы корректности существенно шире ранее известных. Вопрос о максимальности классов корректности II и III, решенный здесь, ранее не был изучен.

Наиболее интересным из полученных результатов является то, что функция Грина $G(x, t)$ на лучах $x > 0$ и $x < 0$ убывает с различной скоростью. Это неудивительно, так как $G(x, t)$ есть целая функция x и поэтому на разных лучах может вести себя по-разному.

2. Рассмотрим функцию Грина задачи Коши для корректного по Петровскому уравнения с постоянными коэффициентами порядка $n > 1$ по t , разрешенного относительно $\partial^n u / \partial t^n$, т. е. решение задачи

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}} \Big|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}} \Big|_{t=0} = \delta(x).$$

Лемма (В. М. Борок (3)). Характеристические корни системы с постоянными коэффициентам, корректной по Петровскому, при больших s имеют одно из следующих разложений в ряд Пуассе:

$1^0. \lambda_j(s) = a_{0j} s^{k_{0j}} + \dots, k_{0j} > 0$ четно, $\text{Re } a_{0j} < 0$;

$2^0. \lambda_j(s) = a_{0j} s^{k_{0j}} + \dots + a_{pj} s^{k_{pj}} + \dots, k_{0j} > \dots > k_{pj} > 0$, числа $k_{0j}, k_{1j}, \dots, k_{pj}$ целые, k_{pj} четно, $\text{Re } a_{0j} = \dots = \text{Re } a_{1j} = \dots = \text{Re } a_{p-1,j} = 0, \text{Re } a_{pj} < 0$;

3°. $\lambda_j(s) = a_{0j}s^{k_{0j}} + \dots + a_{lj}s + \dots$, числа k_{0j}, k_{1j}, \dots целые, $k_{0j} \geq 2$, $k_{0j} > k_{1j} > \dots \geq 1$, $\operatorname{Re} a_{0j} = \dots = \operatorname{Re} a_{lj} = 0$.

4°. $\lambda_j(s) = a_{0j}s + a_{1j} + a_{2j}s^{-k_{0j}} + \dots$, $k_{0j} > 0$.

При этом система не может в качестве $\lambda_j(s)$ иметь только корни вида 4°, $a_{0j} = 0$.

Мы приведем здесь только асимптотику $G(x, t)$; классы корректности и некорректности получаются отсюда тривиальным образом.

Обозначим через α_j порядок роста $\prod_k (\lambda_j(s) - \lambda_k(s))$ по s , $\alpha_j \geq 1$.

Теорема 1. При $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow \infty$ функция Грина равна сумме n слагаемых. Каждый корень вида 1°, 2°, 3° дает слагаемое такое же, как и в таблице, с заменой n на k_{0j} , p на k_{pj} , помноженное, кроме того,

еще на $B_j(|x|/t)^{\frac{-\alpha_j}{k_{0j}-1}}$. При дифференцировании по t слагаемое, соответ-

ствующее корню $\lambda_j(s)$, помножается на $(|x|/t)^{\frac{k_{0j}}{k_{0j}-1}}$, при дифференциро-

вании по x — на $(|x|/t)^{\frac{1}{k_{0j}-1}}$. Слагаемые, соответствующие корням типа 4°, и их производные по x и t до порядка $\alpha_j - 1$ включительно являются финитными функциями. Производные по x порядка $m \geq \alpha_j$ и производные по t , если $a_{0j} \neq 0$, являются суммой конечного числа производных δ -функций порядка $m - \alpha_j$. Если $a_{0j} = 0$, то все производные по t финитны.

З а м е ч а н и е 1. $G(x, t)$ всегда есть функция. Если уравнение (5) имеет характеристические корни только вида 1°, 2° и 3°, то $G(x, t)$ при любом $t > 0$ является целой функцией x .

З а м е ч а н и е 2. Всякое решение системы уравнений с постоянными коэффициентами, корректной по Петровскому, получается из некоторого решения уравнения вида (5) применением к нему дифференциального оператора $T(id/\partial x)$ с постоянными коэффициентами (4). Если система имеет характеристические корни только вида 1° и 2°, то классы корректности уравнения и системы совпадают; если есть еще корни вида 3° или 4°, то от начальных данных требуется повышение гладкости на конечный порядок и ограниченность нескольких более высоких производных, чем в уравнении.

З а м е ч а н и е 3. Если коэффициент уравнения зависят от t , то все изложенные выше результаты справедливы, если потребовать выполнения полагаемых ранее условий на коэффициенты $P(s)$ равномерно по t при $0 \leq t \leq T$.

Автор приносит глубокую благодарность Я. И. Житомирскому, привлечшему внимание автора к рассматриваемой теме.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 XI 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Д. Эй д е л ь м а н, Матем. сборн., 38(80), № 1, 51 (1956). ² Г. Е. Ш и л о в, УМН, 10, в. 4, 89 (1955). ³ В. М. Б о р о к, Изв. Высш. учебн. зав., Математика, № 1 (8) (1959). ⁴ В. М. Б о р о к, ДАН, 114, № 4 (1957).

А. А. ШАРШАНОВ

СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯВНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ АРГУМЕНТА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 XII 1959)

§ 1. Настоящая статья является дальнейшим развитием работы ⁽¹⁾. Задача, которая здесь решается, следующая. Даны функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$, периодические по z с периодом, равным единице, кусочно-дифференцируемые по z , аналитические по x и y , причем $D(u, v)/D(x, y) > 0$ при любых z и всех x и y в рассматриваемой области. Требуется построить функции $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$, периодические по z

$$u(x, y, z + 1, t) = u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z + 1, t) = v(x, y, z, t), \quad (1)$$

статочное число раз дифференцируемые по t , аналитические по x и y , имеющие $D(u(x, y, z, t), v(x, y, z, t))/D(x, y) \neq 0$ при всех вещественных z и t и рассматриваемых x и y , удовлетворяющие условиям:

$$1) \quad u(x, y, z, 0) = x, \quad v(x, y, z, 0) = y;$$

$$2) \quad u(x, y, z, 1) = u(x, y, z), \quad v(x, y, z, 1) = v(x, y, z);$$

$$3) \quad u[u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), z + t_1, t_2] = u(x, y, z, t_1 + t_2),$$

$$v[u(x, y, z, t_1), v(x, y, z, t_1), z + t_1, t_2] = v(x, y, z, t_1 + t_2).$$

Обозначая $\tau = z + t$, нетрудно показать ⁽²⁾, что искомые функции, если они существуют, должны удовлетворять системе обыкновенных уравнений

$$\frac{du}{d\tau} = \varphi(u, v, \tau), \quad \frac{dv}{d\tau} = \psi(u, v, \tau), \quad \frac{d\tau}{d\tau} = 1, \quad (2)$$

где функции φ и ψ являются периодическими по τ

$$\varphi(u, v, \tau + 1) = \varphi(u, v, \tau), \quad \psi(u, v, \tau + 1) = \psi(u, v, \tau). \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть две пары функций $u_1(x, y, z)$, $v_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$, $v_2(x, y, z)$, удовлетворяющие перечисленным выше требованиям, и $z = n$, где n — любое целое положительное или отрицательное число,падают, т. е.

$$u_1(x, y, n) = u_2(x, y, n), \quad v_1(x, y, n) = v_2(x, y, n),$$

при $z \neq n$ они как угодно стилижаются друг от друга. Тогда две системы дифференциальных уравнений (2) с соответствующими для этих функций правыми частями $\varphi_1(u, v, \tau)$, $\psi_1(u, v, \tau)$ и $\varphi_2(u, v, \tau)$, $\psi_2(u, v, \tau)$ падают решениями, которые, имея одинаковые начальные условия,падают далее при значениях t , равных целому числу периодов.

Рассмотренный в статье ⁽¹⁾ случай принадлежит к тому, когда периодичность по z одной пары, например $u_2(x, y, z)$ и $v_2(x, y, z)$, сводится к отсутствию зависимости от этого аргумента. В этом случае $\varphi_2(u, v, \tau)$ и $\psi_2(u, v, \tau)$ не зависят от τ .

§ 2. Рассмотрим способ построения искомых функций (1) и (3) в виде степенных рядов, представляющий собой развитие метода А. Н. Коркина. Предположим, что существует решение $(\alpha(z), \beta(z))$ системы уравнений

$$u(\alpha(z), \beta(z), z) = \alpha(z), \quad v(\alpha(z), \beta(z), z) = \beta(z)$$

и что в окрестности его имеем ряды

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha(z) + A_{10}(z)(x - \alpha(z)) + A_{01}(z)(y - \beta(z)) + \\ &\quad + A_{20}(z)(x - \alpha(z))^2 + \dots, \\ v(x, y, z) &= \beta(z) + B_{10}(z)(x - \alpha(z)) + B_{01}(z)(y - \beta(z)) + \\ &\quad + B_{20}(z)(x - \alpha(z))^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Задача имеет решение при условии, что корни ρ_1 и ρ_2 уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{10}(z) - \rho & A_{01}(z) \\ B_{10}(z) & B_{01}(z) - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

не зависят от z — это необходимо. Будем предполагать также, что коэффициенты (5) вещественны и $\rho_1 \rho_2 > 0$.

Замечая, что функции $u = \alpha(\tau)$, $v = \beta(\tau)$, $\tau = z + t$, представляют собою периодическое решение системы (2), нетрудно понять, что $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ нужно искать в виде рядов

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \alpha(z + t) + \alpha_{10}(z, t)(x - \alpha(z)) + \alpha_{01}(z, t)(y - \beta(z)) + \\ &\quad + \alpha_{20}(z, t)(x - \alpha(z))^2 + \dots, \\ v(x, y, z, t) &= \beta(z + t) + \beta_{10}(z, t)(x - \alpha(z)) + \beta_{01}(z, t)(y - \beta(z)) + \\ &\quad + \beta_{20}(z, t)(x - \alpha(z))^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул (4) и (6) видно, что, не уменьшая общности, можно положить $\alpha(z) = \beta(z) = 0$. Это будет соответствовать переходу к независимым переменным $x - \alpha(z)$, $y - \beta(z)$ и к функциям $u(x, y, z, t) - \alpha(z + t)$ и $v(x, y, z, t) - \beta(z + t)$. Будем ниже предполагать, что такой переход выполнен. Поэтому для искомых функций $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ нужно писать ряды

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi_{10}(z)x + \varphi_{01}(z)y + \varphi_{20}(z)x^2 + \varphi_{11}(z)xy + \varphi_{02}(z)y^2 + \dots, \\ \psi(x, y, z) &= \psi_{10}(z)x + \psi_{01}(z)y + \psi_{20}(z)x^2 + \psi_{11}(z)xy + \psi_{02}(z)y^2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления коэффициентов $\alpha_{mp}(z, t)$, $\beta_{mp}(z, t)$, $\varphi_{mp}(z)$ и $\psi_{mp}(z)$ привлечем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} &= \varphi(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + \psi(x, y, z) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z}, \\ \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial t} &= \varphi(x, y, z) \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} + \psi(x, y, z) \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (8)$$

которые нетрудно получить, исходя из (2). Подставляя в (8) ряды (7) и приравнявая справа и слева от знака равенства коэффициенты при x и y , найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{10}}{\partial t} &= \varphi_{10}(z)\alpha_{10} + \psi_{10}(z)\alpha_{01} + \frac{\partial \alpha_{10}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \beta_{10}}{\partial t} = \varphi_{10}(z)\beta_{10} + \psi_{10}(z)\beta_{01} + \frac{\partial \beta_{10}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial t} &= \varphi_{01}(z)\alpha_{10} + \psi_{01}(z)\alpha_{10} + \frac{\partial \alpha_{01}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \beta_{01}}{\partial t} = \varphi_{01}(z)\beta_{10} + \psi_{01}(z)\beta_{01} + \frac{\partial \beta_{01}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если приравнять коэффициенты при $x^i y^k$ ($i + k \geq 2$), то получим систему $2(i + k + 1)$ дифференциальных уравнений, связывающих функции $\alpha_{mp}(z, t)$, $\beta_{mp}(z, t)$, $\varphi_{mp}(z)$ и $\psi_{mp}(z)$, у которых сумма индексов $m + p \leq i + k$. Из всех этих систем уравнений, предполагая, в силу (3), периодичность искомых коэффициентов по z , представляется во

нельзя определить их, если добавить сюда условия, вытекающие из 1), и (4):

$$\alpha_{10}(z, 0) = 1, \quad \alpha_{01}(z, 0) = 0, \quad \alpha_{ik}(z, 0) = 0, \quad (10)$$

$$\beta_{10}(z, 0) = 0, \quad \beta_{01}(z, 0) = 1, \quad \beta_{ik}(z, 0) = 0, \quad i + k \geq 2;$$

$$\alpha_{mp}(z, 1) = A_{mp}(z), \quad \beta_{mp}(z, 1) = B_{mp}(z), \quad m + p \geq 1. \quad (11)$$

Учитывая условия (10), получим для выражения $\varphi_{mp}(z)$ и $\psi_{mp}(z)$ из $\alpha_{mp}(z, t)$ и $\beta_{mp}(z, t)$ соответственно следующие формулы

$$\varphi_{mp}(z) = \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial \alpha_{mp}}{\partial z} \Big|_{t=0}, \quad \psi_{mp}(z) = \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial t} \Big|_{t=0} - \frac{\partial \beta_{mp}}{\partial z} \Big|_{t=0}. \quad (12)$$

Периодическое по z решение системы (9), удовлетворяющее условиям (10) и (11), равно

$$\begin{aligned} \alpha_{10}(z, t) &= \rho_1^t \frac{\gamma_1(z)}{\gamma_1(z+t)} \frac{t_{11}(z) t_{22}(z+t)}{d(z+t)} - \rho_2^t \frac{\gamma_2(z)}{\gamma_2(z+t)} \frac{t_{21}(z) t_{12}(z+t)}{d(z+t)}, \\ \alpha_{01}(z, t) &= \rho_1^t \frac{\gamma_1(z)}{\gamma_1(z+t)} \frac{t_{12}(z) t_{22}(z+t)}{d(z+t)} - \rho_2^t \frac{\gamma_2(z)}{\gamma_2(z+t)} \frac{t_{22}(z) t_{12}(z+t)}{d(z+t)}, \\ \varphi_{10}(z, t) &= -\rho_1^t \frac{\gamma_1(z)}{\gamma_1(z+t)} \frac{t_{11}(z) t_{21}(z+t)}{d(z+t)} + \rho_2^t \frac{\gamma_2(z)}{\gamma_2(z+t)} \frac{t_{21}(z) t_{11}(z+t)}{d(z+t)}, \\ \varphi_{01}(z, t) &= -\rho_1^t \frac{\gamma_1(z)}{\gamma_1(z+t)} \frac{t_{12}(z) t_{21}(z+t)}{d(z+t)} + \rho_2^t \frac{\gamma_2(z)}{\gamma_2(z+t)} \frac{t_{22}(z) t_{11}(z+t)}{d(z+t)}, \\ d(z) &= t_{11}(z) t_{22}(z) - t_{12}(z) t_{21}(z), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\gamma_1(z)$ и $\gamma_2(z)$ — произвольные периодические функции с периодом, равным единице, не равные ни при каких z нулю, а функции $t_{ik}(z)$ являются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} t_{11}(z) & t_{12}(z) \\ t_{21}(z) & t_{22}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B_{10}(z) & A_{10}(z) - \rho_1 \\ B_{01}(z) - \rho_2 & -A_{01}(z) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

приводящей матрицу с элементами $A_{10}(z)$, $A_{01}(z)$, $B_{10}(z)$ и $B_{01}(z)$ к диагональному виду. Для функций $\varphi_{10}(z)$, $\varphi_{01}(z)$, $\psi_{10}(z)$ и $\psi_{01}(z)$ при помощи (12) найдем выражения

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(z) &= \omega_{10}(z) - \frac{t'_{11}(z) t_{22}(z) - t_{12}(z) t'_{21}(z)}{d(z)} - \\ &\quad - \left(\frac{t_{11}(z) t_{22}(z) \gamma'_1(z)}{d(z) \gamma_1(z)} - \frac{t_{12}(z) t_{21}(z) \gamma'_2(z)}{d(z) \gamma_2(z)} \right), \\ \varphi_{01}(z) &= \sigma_{10}(z) - \frac{t_{11}(z) t'_{21}(z) - t'_{11}(z) t_{21}(z)}{d(z)} - \frac{t_{11}(z) t_{21}(z)}{d(z)} \left(\frac{\gamma'_2(z)}{\gamma_2(z)} - \frac{\gamma'_1(z)}{\gamma_1(z)} \right), \\ \varphi_{01}(z) &= \omega_{01}(z) - \frac{t_{22}(z) t'_{12}(z) - t_{12}(z) t'_{22}(z)}{d(z)} - \frac{t_{12}(z) t_{22}(z)}{d(z)} \left(\frac{\gamma'_1(z)}{\gamma_1(z)} - \frac{\gamma'_2(z)}{\gamma_2(z)} \right), \\ \psi_{01}(z) &= \sigma_{01}(z) - \frac{t_{11}(z) t'_{22}(z) - t_{21}(z) t'_{12}(z)}{d(z)} - \\ &\quad - \left(\frac{t_{11}(z) t_{22}(z) \gamma'_2(z)}{d(z) \gamma_2(z)} - \frac{t_{12}(z) t_{21}(z) \gamma'_1(z)}{d(z) \gamma_1(z)} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \omega_{10}(z) &= \frac{t_{11}(z) t_{22}(z) \ln \rho_1 - t_{12}(z) t_{21}(z) \ln \rho_2}{d(z)}, \quad \sigma_{10}(z) = \frac{t_{11}(z) t_{21}(z)}{d(z)} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}, \\ \omega_{01}(z) &= \frac{t_{22}(z) t_{12}(z)}{d(z)} \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \sigma_{01}(z) = \frac{t_{11}(z) t_{22}(z) \ln \rho_2 - t_{12}(z) t_{21}(z) \ln \rho_1}{d(z)}. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае, если ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют неравенствам

$$\rho_1 \neq \rho_2, \quad \rho_1 \neq \rho_1^{n-q} \rho_2^q, \quad \rho_2 \neq \rho_1^{n-q} \rho_2^q, \quad (17)$$

где $n \geq 2$, $0 \leq q \leq n$, дальнейшие вычисления $\alpha_{mp}(z, t)$ и $\beta_{mp}(z, t)$ можно упростить, воспользовавшись функциональными уравнениями

$$\begin{aligned} u[u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), z+t, 1] &= u[u(x, y, z, 1), v(x, y, z, 1), z, t], \\ v[u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), z+t, 1] &= v[u(x, y, z, 1), v(x, y, z, 1), z, t], \end{aligned} \quad (18)$$

которые вытекают из 3) при учете (1).

Подставляя в (18) ряды (4) и (6), приравнявая коэффициенты при $x^m y^p$ ($m+p=n \geq 2$) в обеих частях равенств и рассматривая величины $\alpha_{ik}(z, t)$ и $\beta_{ik}(z, t)$ с $i+k \leq n-1$ как известные, получим $2(n+1)$ линейных алгебраических уравнений для такого же числа неизвестных величин $\alpha_{mp}(z, t)$ и $\beta_{mp}(z, t)$ с не равным нулю определителем. Функции $\alpha_{10}(z, t)$, $\alpha_{01}(z, t)$, $\beta_{10}(z, t)$ и $\beta_{01}(z, t)$, однако, таким способом не могут быть найдены однозначно.

При выполнении условий (17) ряды для $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ можно расположить по степеням ρ_1^t и ρ_2^t

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_{10}(x, y, z, t)\rho_1^t + u_{01}(x, y, z, t)\rho_2^t + u_{20}(x, y, z, t)\rho_1^{2t} + \dots, \\ v(x, y, z, t) &= v_{10}(x, y, z, t)\rho_1^t + v_{01}(x, y, z, t)\rho_2^t + v_{20}(x, y, z, t)\rho_1^{2t} + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

где $u_{mp}(x, y, z, t)$ и $v_{mp}(x, y, z, t)$ являются периодическими по t функциями. Если в формулах (19) совершить предельный переход к линейному случаю ($A_{ik}(z) = B_{ik}(z) = 0$, $i+k \geq 2$), то получим обычную формулировку теоремы Флоке.

§ 3. Описывая прием построения рядов (6) и (7), мы предполагали, что корни (5) не зависят от z , сумма $\rho_1 + \rho_2$ вещественна, $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\rho_1 \rho_2 > 0$. Однако сходимость этих рядов доказана пока при более жестких условиях. Имеет место теорема, вполне аналогичная теореме 1 статьи (1).

Теорема 2. Пусть вещественные, периодические по z функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z) = 0$ разлагаются в окрестности точки $x=0$, $y=0$ в ряды (4), где $\alpha(z) = \beta(z) = 0$, и пусть корни ρ_1 и ρ_2 уравнения (5) не зависят от z , являются: 1) либо комплексно-сопряженными и разными 2) либо вещественными, подчиняющимися условиям $\rho_1 \rho_2 > 0$, (17) и одной из пар неравенств

$$|\rho_1| < 1, \quad |\rho_2| < 1 \quad \text{или} \quad |\rho_1| > 1, \quad |\rho_2| > 1.$$

Тогда существует при любом конечном t окрестность точки $x=0$, $y=0$, в которой функции $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ разлагаются в ряды (6) с периодическими по z коэффициентами.

Из любой окрестности $x=0$, $y=0$ при выполнении условий теоремы 2 функции $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, возможно аналитически продолжить в более широкую область, которая в статье (1) была названа итерационной. В данном случае для каждого z будет своя область. Чтобы получить значения функций в какой-либо точке названной области, нужно воспользоваться уравнениями (18), в которых единица заменена соответствующим целым числом n , положительным или отрицательным, а в качестве x и y взяты координаты тех точек из окрестности, где ряды заведомо сходятся.

Выражаю благодарность Н. И. Ахиезеру за обсуждение работы.

Физико-технический институт
Академии наук УССР

Поступило
17 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Шаршанов, ДАН, 127, № 6 (1959). ² Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, М.—Л., 1940.

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 XII 1959)

1. В многочисленных работах, посвященных приближенному вычислению кратных интегралов, появившихся за последнее время, построены, частности, квадратурные формулы для функций $f(x_1, \dots, x_s)$, принадлежащих классу $E_s(\alpha)$, определенному условиями:

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} c(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

$$c(m_1, \dots, m_s) = O((\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{-\alpha}), \quad \bar{m}_i = \max(1, |m_i|), \quad \alpha > 1.$$

Обозначим через $H_s(\alpha, c)$ класс функций, определенный условиями

$$\left| \frac{\partial^n f(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_s^{\gamma_s}} \right| < c, \quad 0 \leq n \leq \alpha s, \quad 0 \leq \gamma_i \leq \alpha, \quad \gamma_1 + \dots + \gamma_s = n.$$

Периодические функции из $H_s(\alpha, c)$ принадлежат и $E_s(\alpha)$. Однако можно построить квадратурные формулы, действующие на всем классе $H_s(\alpha, c)$.

Теорема 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит $H_s(\alpha, c)$, $\alpha > 1$; $\tau_\alpha(z)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) $0 = \tau_\alpha(0) < \tau_\alpha(z') < \tau_\alpha(z'') < \tau_\alpha(1) = 1$, $0 < z' < z'' < 1$;
- 2) $|\tau_\alpha^{(k)}(z)| < A$, $0 \leq k \leq \alpha + 1$;
- 3) $\tau_\alpha^{(k)}(0) = \tau_\alpha^{(k)}(1) = 0$, $1 \leq k \leq \alpha$.

Тогда существуют такие целые a_1, \dots, a_s , $a_i = a_i(N)$, что

$$R = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f \left[\tau_\alpha \left(\left\{ \frac{ka_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_\alpha \left(\left\{ \frac{ka_s}{N} \right\} \right) \right] \tau'_\alpha \left(\left\{ \frac{ka_1}{N} \right\} \right) \dots \tau'_\alpha \left(\left\{ \frac{ka_s}{N} \right\} \right) - \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s \right| = O \left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^\alpha} \right)^*.$$

Доказательство. Сделаем в интеграле $\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$ замену $x_i = \tau_\alpha(z_i)$. Подынтегральная функция после такой замены окажется, очевидно, принадлежащей классу $E_s(\alpha)$, и следовательно, доказываемый результат вытекает из соответствующих теорем ^(1, 2).

* $\{x\}$ — дробная часть x .

Замечание. Пусть $f(x_1, \dots, x_s)$ имеет особенность на гиперплоскости $x_1 = x_1^0, \dots, x_v = x_v^0$; $1 \leq v \leq s$; $\frac{\partial^{\alpha v} f(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1^{\alpha} \dots \partial x_v^{\alpha}} = O\left(\frac{1}{r^{\beta + \alpha v}}\right)$, $0 < \beta < v$, $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_v - x_v^0)^2}$. Пусть f имеет смешанные производные, фигурирующие в определении класса $H_s(\alpha, c)$, непрерывные в остальной части единичного куба. Тогда можно вычислять интегралы от таких функций, вводя $\tau_{\alpha, i}(z)$, удовлетворяющие условию $\tau_{\alpha, i}^{(k)}(z_i^0) = 0$, $1 \leq k \leq \alpha$; $\tau_{\alpha, i}^{(\alpha)}(z_i) = O((z_i - z_i^0)^{b-\alpha})$, $b = \frac{\alpha v}{v - \beta}$, $\tau_{\alpha, i}(z_i^0) = x_i^0$, $1 \leq i \leq v$ *.

2. Пусть $f(x_1, \dots, x_s)$ задана на единичном кубе и отлична от нуля на некотором параллелепипеде, грани которого параллельны координатным плоскостям. Пусть $f(x_1, \dots, x_s)$ на этом параллелепипеде удовлетворяет условиям, определяющим класс функций $H_s(1, c)$. Доопределим $f(x_1, \dots, x_s)$ во всем пространстве, положив

$$f(x_1, \dots, x_s) = f(\{x_1\}, \dots, \{x_s\}).$$

Введем

$$f_{\Delta}(x_1, \dots, x_s) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \dots \int_{-\Delta}^{\Delta} f[(x_1 + \xi_1), \dots, (x_s + \xi_s)] d\xi_1 \dots d\xi_s, \\ \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{\Delta}(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s. \quad (1)$$

Если $c(m_1, \dots, m_s)$ и $c_{\Delta}(m_1, \dots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функций $f(x_1, \dots, x_s)$ и $f_{\Delta}(x_1, \dots, x_s)$, то, очевидно,

$$|c(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{c'}{m_1 \dots m_s}, \quad (2)$$

$$|c_{\Delta}(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{c'}{m_1 \dots m_1} \left| \frac{\sin 2\pi m_1 \Delta}{2\pi m_1 \Delta} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{\sin 2\pi m_s \Delta}{2\pi m_s \Delta} \right|, \quad (3)$$

$$c' = c'(c, s).$$

Рассмотрим

$$R^N(z, f) = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}, \frac{kz}{N}, \dots, \frac{kz^{s-1}}{N}\right) - \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s; (4) \right. \\ R_{\Delta}^N(z, f) = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_{\Delta}\left(\frac{k}{N}, \frac{kz}{N}, \dots, \frac{kz^{s-1}}{N}\right) - \right. \\ \left. - \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{\Delta}(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s; \quad (5) \right.$$

$$r_{\Delta}(z, f) = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{k}{N}, \frac{kz}{N}, \dots, \frac{kz^{s-1}}{N}\right) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_{\Delta}\left(\frac{k}{N}, \frac{kz}{N}, \dots, \frac{kz^{s-1}}{N}\right) \right|. \quad (6)$$

* На возможность вычисления интегралов от функций, имеющих особенности, при помощи $\tau_{\alpha}(z)$ было указано участниками семинара по теоретико-числовому методу Монте-Карло при Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР.

Теорема 2. Если $N = p > s$ простое, то существует такое целое $= a(p)$, $1 \leq a \leq p-1$, что $R^N(a, f) = O\left(\frac{\ln^s N}{N}\right)$.

Доказательство. Из (1), (4), (5) и (6) получим

$$R^N(z, f) \leq R_\Delta^N(z, f) + r_\Delta(z, f). \quad (7)$$

Оценим

$$\min_{1 \leq z \leq p-1} \max_{f \in H_s(\alpha, c)} R_\Delta^p(z, f).$$

Воспользовавшись известными оценками (4) и (3), получим

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq z \leq p-1} \max_{f \in H_s(\alpha, c)} R_\Delta^p(z, f) &\leq \max_{f \in H_s(\alpha, c)} \frac{1}{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} R_\Delta^p(z, f) \leq \\ &\leq \frac{c'}{p-1} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m_1 \dots m_s}} \left| \frac{\sin 2\pi m_1 \Delta}{2\pi m_1 \Delta} \right| \dots \left| \frac{\sin 2\pi m_s \Delta}{2\pi m_s \Delta} \right| A(m_1, \dots, m_s), \end{aligned}$$

где

$$0 \leq A(m_1, \dots, m_s) \begin{cases} = p-1 & \text{при } d \equiv 0 \pmod{p}, \\ \leq s-1 & \text{при } d \not\equiv 0 \pmod{p}; \end{cases}$$

— общий наибольший делитель m_1, \dots, m_s . Штрих в знаке суммы означает, что исключается значение $m_1 = \dots = m_s = 0$. Возьмем $\Delta = \frac{1}{p}$. Тогда слагаемые, соответствующие наборам m_1, \dots, m_s , для которых $d \not\equiv 0 \pmod{p}$, обратятся в нуль, если хотя бы одно $m_i \neq 0$. Следовательно, для всех слагаемых, отличных от нуля, $A(m_1, \dots, m_s) \leq s-1$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq z \leq p-1} \max_{f \in H_s(\alpha, c)} R_\Delta^p(z, f) &\leq \frac{(s-1)c'}{p-1} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left| \frac{\sin 2\pi m \Delta}{2\pi m \Delta} \right| \right)^s; \\ \left| \frac{\sin 2\pi m \Delta}{2\pi m \Delta} \right| &\leq \begin{cases} 1 & \text{при } m < \frac{1}{\Delta} = p, \\ \frac{1}{m\Delta} & \text{при } m \geq \frac{1}{\Delta} = p. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq z \leq p-1} \max_{f \in H_s(\alpha, c)} R_\Delta^p(z, f) &\leq \\ &\leq \frac{(s-1)c'}{p-1} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{m} + 2 \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{m^2 \Delta} \right)^s = O\left(\frac{\ln^s p}{p}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим теперь $r_\Delta(z, f)$. Если точка $\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{kz}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)$ удалена от поверхности параллелепипеда более чем на Δ , то

$$\left| f\left(\frac{k}{p}, \frac{kz}{p}, \dots, \frac{kz^{s-1}}{p}\right) - f_\Delta\left(\frac{k}{p}, \frac{kz}{p}, \dots, \frac{kz^{s-1}}{p}\right) \right| \leq cs\Delta.$$

Число же точек $\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{kz}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)$, удаленных от поверхности параллелепипеда не более чем на Δ , при каждом z не превосходит $\Delta p \cdot 2^s$. Из сказанного вытекает следующая оценка для $r_\Delta(z, f)$:

$$r_\Delta(z, f) \leq \Delta(cs + 2^s). \quad (9)$$

Из (7), (8), (9) получаем

$$\min_{1 \leq z \leq p-1} \max_{f \in H_s(\alpha, c)} R^p(z, f) = O\left(\frac{\ln^s p}{p}\right),$$

что и доказывает теорему 2.

Замечание. Нетрудно показать, что

$$R^p(a_1, \dots, a_s) = \left| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p f\left(\frac{ka_1}{p}, \dots, \frac{ka_s}{p}\right) - \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s \right| = O\left(\frac{\ln^s p}{p}\right),$$

где a_1, \dots, a_s — оптимальные коэффициенты, определяемые в работе (2).

3. Пусть дано уравнение

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_l} \int_0^1 \dots \int_0^1 K(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_s) \varphi(y_1 \dots y_s) \times \\ \times dx_1 \dots dy_s + f(x_1, \dots, x_s), \quad l \geq 1, \quad (10)$$

где $K(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_s) \in H_{2s}(\alpha, c_1)$, $f(x_1, \dots, x_s) \in H_s(\alpha, c_2)$. Очевидно, что $\varphi(x_1, \dots, x_s) \in H_s(\alpha, c_3)$, $c_3 = c_3(c_1, c_2, s)$.

Если $K_1(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_s) = K(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_s)$ при $0 \leq y_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq l$ и $K_1(y_1, \dots, y_s, x_1, \dots, x_s) = 0$ в остальных точках единичного куба, то (в понятных обозначениях) уравнение (10) перепишется в виде

$$\varphi(P) = \int_{G_s} K_1(Q, P) \varphi(Q) dQ + f(P). \quad (11)$$

Возьмем в единичном s -мерном кубе G_s точки $M_i = M\left(\frac{i}{N}, \left\{\frac{ia}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{ia^{s-1}}{N}\right\}\right)$, где a определено в теореме 2.

Теорема 3. Если величины $\tilde{\varphi}(M_j)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\tilde{\varphi}(M_j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_1(M_i, M_j) \tilde{\varphi}(M_i) + f(M_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

то справедливо равенство

$$\varphi(M_j) = \tilde{\varphi}(M_j) + O\left(\frac{\ln^s N}{N}\right).$$

Доказательство этой теоремы с очевидностью вытекает из теоремы 2 и из (3).

Вопросами приближенного решения интегральных уравнений типа Вольтерра занимался также Ю. Н. Шахов (5).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 XI 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. С. Бахвалов, Вестн. МГУ, № 4 (1959). ² Н. М. Коробов, ДАН, 128, № 6 (1959). ³ Н. М. Коробов, ДАН, 128, № 2 (1959). ⁴ Н. М. Коробов, Вестн. МГУ, № 4 (1959). ⁵ Ю. Н. Шахов, ДАН, 128, № 6 (1959).

В. А. ЩЕЛЬНОВ

**О МНОГОЗНАЧНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ
В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 XII 1959)

В настоящей заметке рассматриваются некоторые свойства общих, вообще говоря, многозначных линейных операторов в локально выпуклых отделимых пространствах.

Пусть X, Y — два локально выпуклых пространства. Любое множество из произведения (X, Y) пространств X и Y можно рассматривать как график Γ_A некоторого оператора A с областью определения $D_A \subset X$ и областью значений $R_A \subset Y$. Оператор A будем называть линейным, если его график Γ_A является линейным множеством. Назовем линейный оператор A открытым, если он преобразует любую окрестность нуля в D_A в окрестность нуля в R_A . Оператор, обратный к открытому, назовем непрерывным. Замыкание \bar{A} оператора A определим как оператор, график которого есть замыкание графика данного оператора.

Если M — векторное подпространство в X ; X^* — пространство, сопряженное к X , то через M° будем обозначать векторное подпространство в X^* , ортогональное к M . Оператором, сопряженным к данному линейному оператору A , назовем оператор A^* с областью определения $D_{A^*} \subset Y^*$ и графиком

$$\Gamma_{A^*} = \Gamma_{-A}^\circ \subset (X^*, Y^*).$$

Легко проверить, что

$$\Gamma_{A^*} = \{(x^*, y^*) \in (X^*, Y^*): \langle Ax, y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle, x \in D_A\}.$$

Теорема 1. 1°. Для того чтобы оператор A был открыт, необходимо, а если $A^{-1}(0) = \bar{A}^{-1}(0)$, то и достаточно, чтобы оператор \bar{A} был открыт.

2°. Если множество R_A замкнуто, то $R_A = R_{\bar{A}}$.

3°. Если оператор A открыт, а множество R_A замкнуто, то $A^{-1}(0) = \bar{A}^{-1}(0)$.

4°. Пусть оператор A открыт, а множество R_A замкнуто. Тогда для того, чтобы оператор A был замкнут, необходимо и достаточно, чтобы множество $A^{-1}(0)$ было замкнуто.

5°. Для того чтобы оператор A был замкнут, необходимо и достаточно, чтобы $R_A = R_{\bar{A}}$ и $A^{-1}(0) = \bar{A}^{-1}(0)$.

Теорема 2.

$$A^*(0) = D_A^\circ, \quad A^{*-1}(0) = R_A^\circ,$$

$$\bar{A}(0) = D_{A^*}^\circ, \quad \bar{A}^{-1}(0) = R_{A^*}^\circ.$$

Докажем первое соотношение. Очевидно,

$$(D_A, Y) = (\mathbf{0}, Y) + \Gamma_A.$$

Отсюда

$$(D_A^0, \mathbf{0}) = (X^*, \mathbf{0}) \cap \Gamma_A^0 = (A^*(\mathbf{0}), \mathbf{0}),$$

и требуемое равенство доказано.

Следствия. 1°. Для того чтобы оператор A допускал однозначное замыкание, необходимо и достаточно, чтобы D_{A^*} было слабо плотно в Y^* .

2°. Для того чтобы оператор A^* был однозначен, необходимо и достаточно, чтобы D_A было плотно в X .

Теорема 3. Пусть A — линейный замкнутый оператор и $\Gamma_A \subset (X, Y)$.

I. Для того чтобы оператор A был слабо открыт, необходимо и достаточно, чтобы R_{A^*} было слабо замкнуто.

II. Допустим, что X, Y — пространство Фреше. Тогда следующие пять свойств эквивалентны:

- 1) A сильно открыт;
- 2) A слабо открыт;
- 3) R_A замкнуто;
- 4) A^* слабо открыт;
- 5) R_{A^*} слабо замкнуто.

III. Пусть X и Y — пространства Банаха. Тогда каждое из пяти свойств пункта II равносильно любому из следующих двух:

- 6) A^* сильно открыт;
- 7) R_{A^*} сильно замкнуто.

Доказательства теорем 1 и 3 систематически используют результаты монографии ⁽¹⁾.

Теорема 3 доказывается сведением к случаю линейного однозначного непрерывного оператора, определенного на всем пространстве. Для этого рассматривается линейный однозначный непрерывный оператор V , определенный на X так:

$$V(x) = \varphi(x, \mathbf{0}),$$

где φ — каноническое отображение пространства (X, Y) на фактор-пространство $(X, Y)/\Gamma_A$. Далее исследуются связи между свойствами операторов A, A^* и V, V^* . Теорема получается из соответствующих утверждений для оператора V .

Замечание 1. Применение теорем 1 и 3 к оператору A^{-1} равносильно замене в этих теоремах множеств $A^{-1}(\mathbf{0}), \bar{A}^{-1}(\mathbf{0}), R_A, R_{\bar{A}}, R_{A^*}$ соответственно множествами $A(\mathbf{0}), \bar{A}(\mathbf{0}), D_A, D_{\bar{A}}, D_{A^*}$ и слова «открытый» — словом «непрерывный».

Замечание 2. Учитывая теоремы 1 и 2, можно получить некоторые утверждения теоремы 3 для любого (необязательно замкнутого) линейного оператора.

Теорема 4. Пусть X — пространство Фреше; M и N — векторные подпространства в X ; M_1 и N_1 — векторные подпространства в X^* .

1°. Если сумма $M + N$ замкнута, то сумма $M^0 + N^0$ слабо замкнута.

2°. Если сумма $M_1 + N_1$ слабо замкнута, то сумма $M_1^0 + N_1^0$ замкнута.

3°. Если X — пространство Банаха, то для того чтобы сумма $M^0 + N^0$ была слабо замкнута, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно замкнута.

Для доказательства теоремы достаточно применить теорему 3 к оператору A , имеющему график

$$\Gamma_A = \Gamma_I \cap (M, M) + (\mathbf{0}, N)$$

где Γ_I — график тождественного оператора в X .

Теорема 4 является эквивалентом свойств теоремы 3, относящихся к множествам R_A и R_{A^*} .

Если A и B — линейные операторы, то при надлежащих условиях естественным образом определяются операторы: сумма $A + B$ и произведение BA . Следующая теорема доказывается на основании теоремы 3.

Теорема 5. Пусть A и B — линейные замкнутые операторы, действующие в пространстве Фреше. Тогда:

I. 1°. Если $D_A + D_B$ замкнуто, то $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2°. Если $D_{A^*} + D_{B^*}$ слабо замкнуто, то $\Gamma_{A+B}^o = \Gamma_{(A^*+B^*)}^o$.

II. 1°. Если $R_A + D_B$ замкнуто, то $(BA)^* = A^*B^*$.

2°. Если $D_{A^*} + R_{B^*}$ слабо замкнуто, то $\Gamma_{BA}^o = \Gamma_{A^*B^*}^o$.

Если операторы A и B действуют в пространствах Банаха, то множества $D_{A^*} + D_{B^*}$ и $D_{A^*} + R_{B^*}$ слабо замкнуты тогда и только тогда, когда они сильно замкнуты.

Поступило
1 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Б у р б а к и, Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

С. В. ЯБЛОНСКИЙ, А. М. ГИЛЬМАН, И. В. КОТЕЛЬНИКОВ и
П. М. ПОТЫЛИЦЫН

**УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ
РЕГУЛИРОВАНИЯ УЛИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 X 1959)

Рост интенсивности движения городского транспорта ведет к расширению средств регулирования, особенно перспективным является применение автоматов. Широкое распространение получили простые автоматы, в которых режим движения транспорта сменяется периодически. В последнее время появились сообщения о создании более сложных автоматов. Ясно, что структура автомата должна зависеть как от характера потока транспорта, так и от требований, связанных с оптимальностью регулирования. Однако, как показывают исследования В. К. Коробкова, произведенные им в 1956—1958 гг. в Московском государственном университете, математический расчет такого рода автоматов даже в простейшем случае чрезвычайно сложен. В связи с этим возник вопрос о создании устройства для выбора оптимального алгоритма управления. В 1959 г. подобного рода устройство было создано в Горьковском государственном университете; в настоящей заметке излагаются принципы работы этого устройства.

1. Для уточнения задачи поиска оптимального алгоритма управления выясним основные элементы, с которыми связано движение транспорта через перекресток.

Прежде всего нужно выделить поток. Обычно при подходе к перекрестку транспорт располагается в несколько рядов, которые можно разделить на три группы: 1-я группа (считая справа налево) делает поворот направо; 2-я группа движется прямо и 3-я группа делает поворот налево и разворот в обратном направлении.

Поток может иметь самую разнообразную структуру. Так, поток будет детерминированным, если движется колонна машин или если в определенные моменты времени происходит пропуск транспорта на соседнем перекрестке в сторону рассматриваемого перекрестка. Во многих случаях появление машин на перекрестке может рассматриваться как случайное событие. Здесь поток будет случайным. При расчетах, как правило, нет необходимости знать все строение потока, достаточно знать некоторые его характеристики, такие, как среднюю плотность потока или параметры закона распределения появления машин и т. п.

Другим элементом является сам перекресток. Перекрестки с геометрической точки зрения делятся на Т-образные, четырехсторонние и т. п. Каждый перекресток характеризуется условиями проезда через него. Прилегающие к перекрестку улицы могут иметь одностороннее или двустороннее движение, по каждому направлению определено в окрестности перекрестка допустимое число рядов; имеются разного рода знаки и линии, указывающие направление разрешенного движения и т. п. Наконец, каждый перекресток характеризуется типом светофора (трехточечный, четырехточечный и т. п.).

Третьим элементом является алгоритм регулирования. Каждое возможное положение светофора определяет направления, в которых разрешено движение, т. е. некоторый режим. В случае четырехстороннего перекрестка при трехточечном светофоре имеется 2 основных и один переходный режим, при четырехточечном светофоре 6 основных (см. рис. 1) и 15 переходных режимов.

В каждый момент времени перекресток находится в определенном состоянии, т. е. в некоторой фиксированной окрестности перекрестка транспорт занимает определенное положение. Алгоритм регулирования пред-

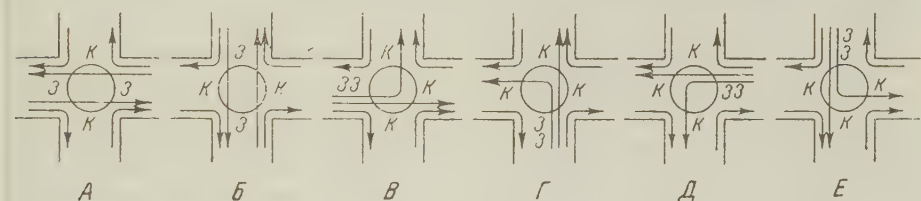


Рис. 1

ставляет правило, которое для каждого момента времени определяет режим, исходя из информации о режиме светофора и состоянии перекрестка в предыдущие моменты времени. Так, алгоритмом будет следующее правило регулирования: последовательно включаются режимы А, В, Д, Б, Г, Е, каждый на определенное число единиц времени. После режима Е вновь включается режим А. При переключении с одного основного режима на другой включается соответствующий подготовительный режим.

2. Из предыдущего видно, что для одного и того же перекрестка и структуры потока можно предложить много алгоритмов регулирования. Например, если в предыдущем примере варьировать время включения основных режимов, то получатся разные алгоритмы. Для того чтобы задача имела определенный смысл, необходимо условиться, по каким показателям сравнивать алгоритмы. Их можно сравнивать, оценивая среднее время ожидания каждой машины, суммарную задержку машин у перекрестка в течение некоторого периода времени T , максимальную длину возможной очереди, сложность схем, реализующих алгоритм, и т. д. С этой точки зрения, например, мы можем утверждать, что алгоритмы с периодической сменой режимов (автоматы без обратной связи), вообще говоря, хуже алгоритмов, учитывающих информацию о состоянии перекрестка (автоматы, имеющие обратную связь с потоком), если стремиться к минимальному времени ожидания. В общем случае математическое сравнение алгоритмов представляет трудную задачу, от решения которой мы пока далеки. Но если оставить автомат на конкретный перекресток, то всегда можно путем наблюдений указать его слабые стороны. Однако эксперименты на реальном перекрестке требуют большой затраты времени и труда. В связи с этим возникает вопрос о создании устройства со стендом, которое позволило бы в лабораторных условиях наблюдать за движением потока при заданном алгоритме управления. Последнее, ввиду удобства визуального наблюдения, дало бы явное преимущество перед оценкой алгоритмов регулирования, производимой на универсальных вычислительных машинах.

3. При моделировании управления на перекрестке нам приходится несколько упрощать ситуацию. Прежде всего происходит дискретизация потока во времени. Введем дискретное время $t = t_0 + k\tau$. Временной шаг выбирается из расчета среднего времени, необходимого в окрестности перекрестка для прохождения машиной расстояния, равного своей длине интервалу между машинами. Мы принимаем, что по каждой дорожке, моделирующей один из рядов в моменты времени, соответствующее всем целочисленным значениям k , к перекрестку либо подходит, либо не подходит машина. Далее мы выбрали тип перекрестка, остановившись на ха-

ракторном случае четырехстороннего перекрестка, к которому примыкают улицы с двухсторонним движением. Величина окрестности, т. е. длина каждой дорожки до перекрестка, характеризуется временем lt беспрепятственного прохождения машиной этой длины. Величина l является максимальным числом движущихся машин, которые возможно разместить на всей длине дорожки в окрестности перекрестка. Мы предполагаем, что интервалы между машинами в движении и в состоянии покоя одинаковы. Переходными процессами при трогании с места и торможении мы пренебрегаем, считая, что они происходят мгновенно.

Далее принимаем, что управление ведется при помощи четырехточечного светофора. При такой системе сигнализации обычно правый поворот разрешен

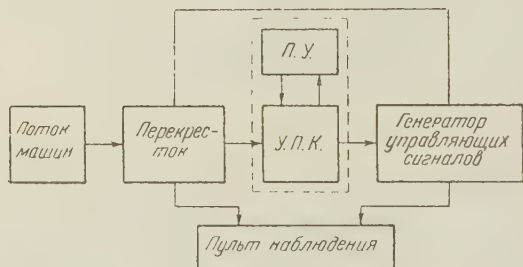


Рис. 2

на любой свет, кроме желтого, т. е. по существу правый поворот не управляется. Поэтому мы пренебрегли потоками машин, совершающими правый поворот. В силу этого в модели имеется только 8 дорожек, каждая из которых моделирует одну группу. Всегда можно за счет подбора величины τ считать, что группа содержит ровно один ряд. Наконец, алгоритм выдает режимы на время, кратные τ , при этом используется информация со всей окрестности перекрестка, т. е. учитывается наличие максимально 8 l машин.

На рис. 2 изображена блок-схема регулирования движения на перекрестке, положенная в основу построения модели. Случайный поток машин моделируется при помощи 8 шумовых генераторов, стробированных тактовым генератором. Эти генераторы дают различные случайные распределения количества импульсов, генерируемых за некоторое заранее определенное число тактов. Каждый импульс «изображает» машину, подошедшую к окрестности перекрестка. Тактовая частота подбирается так, чтобы временной интервал τ_1 в некотором масштабе изображал реальное время τ . При моделировании τ_1 выбирается из соображений удобства визуального наблюдения. В построенной модели было принято $\tau_1 = 15$ сек.

В генераторах предусматривается регулировка, позволяющая менять плотность потока, среднее число машин за определенный промежуток времени и т. п. Так как на каждом направлении работает отдельный генератор, то можно моделировать разные «нагрузки» по разным направлениям.

Для счета импульсов, «изображающих» подходящие машины, были использованы 8 реверсивных двоичных счетчиков, выполненных на реле. В модели было принято $l = 15$. Каждый счетчик имел 4 разряда. Если проезд через перекресток на некотором направлении запрещен, то соответствующий счетчик работает на сложение. Если проезд разрешен, то за время действия стробирующего импульса счетчик меняет режим работы. Сначала он работает на вычитание (уход машины с перекрестка), затем на сложение. Таким образом моделируется возможность одновременного подхода машин к перекрестку и ухода через перекресток. При регулировке генераторов, т. е. при выборе параметров распределения, следует руководствоваться статистическими данными о потоках на исследуемом перекрестке. Детермированные потоки машин могут быть моделированы при помощи перфоленты. Протяжка перфоленты должна быть стробирована тактовым генератором. Данные на перфоленту могут быть перенесены непосредственно с исследуемого перекрестка.

На панели пульта наблюдения (см. рис. 3) пришедшие машины фиксировались при помощи линии из 15 ламп накаливания на каждом направлении. Входы этих ламп подключались к выходам реле реверсивных счетчи-

ов через специальный дешифратор. Алгоритм регулирования движения реализован в программном устройстве (*П. У.*) В устройстве для преобразования кодов (*У. П. К.*) в соответствии с алгоритмом производится обработка информации, получаемой с перекрестка, в результате которой вырабатываются указания по управлению потоком машин. На основании этих показаний генерируются сигналы, включающие светофор. На пульте наблюдения (рис. 3) на каждом направлении установлен четырехточечный светофор, выполненный при помощи ламп накаливания, покрытых цветными колпаками. Обработка информации, производимая в *У. П. К.*, связана с производством арифметических операций, таких как сравнение показаний счетчиков, определение суммарного времени ожидания машин с учетом времени подхода отдельной машины к перекрестку и т. п. Функции *П. У.* и *У. П. К.* могут быть выполнены универсальной цифровой машиной. В связи с этим в пакете предусмотрена возможность подключения цифровой машины ИФТИ в качестве звена, показанного на блок-схеме пунктиром.

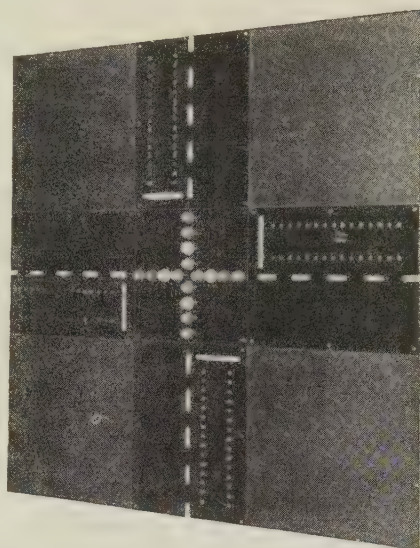


Рис. 3

Однако для проверки многих алгоритмов, представляющих практический интерес в качестве *П. У.* и *У. П. К.*, могут быть использованы сравнительно простые специализированные цифровые устройства. В модели было применено такое устройство, выполненное на реле. Это устройство позволяло реализовать приведенный выше алгоритм, а также усовершенствованный алгоритм, в котором осуществлено выключение режима движения сразу после того, как исчерпывается очередь ожидающих машин и блокировка включения режима движения, если число машин, ожидающих включения этого режима, меньше некоторого числа j ($0 \leq j \leq 4$). Число j устанавливалось заранее при помощи штеккерного устройства.

Исследовательский физико-технический институт
Горьковского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
24 IX 1959

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ШАТУННЫХ КРИВЫХ

Известные ⁽¹⁾ шатунные кривые можно рассматривать как кривые, огибающие ряд положений отдельных точек, принадлежащих шатунной плоскости. Ниже рассматриваются шатунные кривые, являющиеся огибающими прямых, принадлежащих шатунной плоскости. Пусть в плоскости шатуна BC (рис. 1) выбрана произвольная прямая $u-u$. Опустим из точки A перпендикуляры AF и AE на прямые $u-u$ и BC . Тогда уравнение семейства прямых $u-u$ будет

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p \quad (1)$$

или

$$x \cos (\theta_1 + \gamma) + y \sin (\theta_1 + \gamma) = p_1 \cos \gamma + (\sqrt{a^2 - p_1^2} - e) \sin \gamma, \quad (2)$$

где $p = AF$, $p_1 = AE$, $e = BG$ и $a = AB$.

Найдем частную производную по параметру θ_1 от выражения (2)

$$y \cos (\theta_1 + \gamma) - x \sin (\theta_1 + \gamma) = \frac{\partial p_1}{\partial \theta_1} \cos \gamma - \frac{p_1}{\sqrt{a^2 - p_1^2}} \frac{\partial p_1}{\partial \theta_1} \sin \gamma. \quad (3)$$

Отрезок p_1 может быть выражен через параметры механизма (рис. 1).

Введем обозначения: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $a^2 + b^2 + d^2 - c^2 = m^2$, $2bd = k^2$, $2ad = r^2$, $2ab = t^2$ и $d^2 + b^2 = n^2$. Тогда отрезок p_1 может быть представлен так:

$$p_1 = \frac{d(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) \cos \theta_1}{2(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)} \pm \sqrt{\frac{d^2(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 \cos^2 \theta_1 - (n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)[(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - 4a^2(b - d \sin \theta_1)^2]}{4(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2}}. \quad (4)$$

Знак у второго члена выражения (4) выбирается в зависимости от условий сборки механизма, так как каждому положению звена AB соответствуют два возможных положения остальных звеньев. В дальнейшем рассмотрено положение, показанное на рис. 1.

Частная производная $\partial p_1 / \partial \theta_1 = \Psi$ будет равна

$$\Psi = R + T + P + Q + S, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \frac{d[k^2(\sin^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_1) - m^2 \sin^2 \theta_1]}{2(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)} + \frac{dk^2 \cos \theta_1 (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)}{(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2}, \\ T &= \frac{bd \cos \theta_1 (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) [2n^2 + (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)]}{2(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) \sqrt{d^2 \cos^2 \theta_1 (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - (n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) [(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - 4a^2(b - d \sin \theta_1)^2]}}, \\ P &= \frac{d^2(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) \cos \theta_1 [(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) + bd \cos^2 \theta_1]}{2(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) \sqrt{d^2 \cos^2 \theta_1 (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - (n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) [(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - 4a^2(b - d \sin \theta_1)^2]}}, \\ Q &= \frac{2ad \cos \theta_1 (b - d \sin \theta_1) [b(b - d \sin \theta_1) + (n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)]}{(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) \sqrt{d^2 \cos^2 \theta_1 (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - (n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) [(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - 4a^2(b - d \sin \theta_1)^2]}}, \\ S &= \frac{bd \cos \theta_1 \sqrt{d^2 \cos^2 \theta_1 (m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - (n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1) [(m^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2 - 4a^2(b - d \sin \theta_1)^2]}}{(n^2 - k^2 \sin^2 \theta_1)^2}. \end{aligned}$$

Из уравнений (2) и (3) с учетом уравнения (5) получаем параметрические уравнения для огибающей кривой в форме $x = x(\theta_1)$ и $y = y(\theta_1)$.

$$x = [p_1 \cos(\theta_1 + \gamma) - \Psi \sin(\theta_1 + \gamma)] \cos \gamma + \left[(V \overline{a^2 - p_1^2} - e) \cos(\theta_1 + \gamma) + \frac{p_1 \Psi}{V \overline{a^2 - p_1^2}} \sin(\theta_1 + \gamma) \right] \sin \gamma, \quad (6)$$

$$y = [p_1 \sin(\theta_1 + \gamma) + \Psi \cos(\theta_1 + \gamma)] \cos \gamma + \left[(V \overline{a^2 - p_1^2} - e) \sin(\theta_1 + \gamma) - \frac{p_1 \Psi}{V \overline{a^2 - p_1^2}} \cos(\theta_1 + \gamma) \right] \sin \gamma. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) следует, что любая прямая шатунной плоскости, параллельная прямой $u-u$, будет иметь в качестве огибающей кривую, определяемую уравнениями (6) и (7), и, таким образом, для

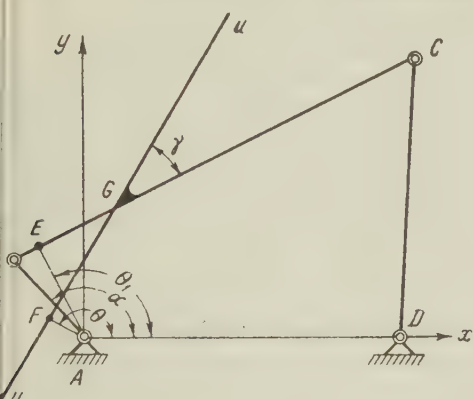


Рис. 1-

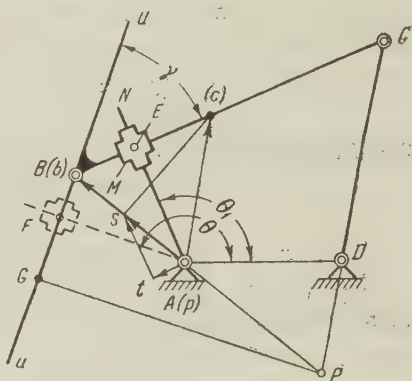


Рис. 2

исследования огибающих можно принять в уравнениях (6) и (7) $e = 0$, т.е. рассматривать случай, когда прямая $u-u$ проходит через точку B. Если направление прямой $u-u$ совпадает с направлением BC шатуна, то угол $\gamma = 0$ и уравнения (6) и (7) принимают вид

$$x = p_1 \cos \theta_1 - \Psi \sin \theta_1, \quad (8)$$

$$y = p_1 \sin \theta_1 + \Psi \cos \theta_1, \quad (9)$$

где p_1 и Ψ определяются из уравнений (4) и (5).

Если ведущим звеном выбрано звено AB, то угол α поворота этого звена (рис. 1) связан с углом θ_1 условием

$$\cos \theta_1 = \frac{m^2 - k^2(r^2 - t^2) \cos \alpha}{t^2 \sin \alpha}. \quad (10)$$

Рассмотренный класс кривых можно назвать линейно огибающими шатунными кривыми, при этом в качестве линии выбрана прямая. Построение этих кривых по точкам может быть сделано следующим образом. Находим (см. рис. 2) положение мгновенного центра вращения звена P и из точки P опускаем перпендикуляр на прямую $u-u$. Точка G будет точкой, принадлежащей кривой, шатунно огибающей прямую $u-u$. Функции $p_1 = p_1(\theta_1)$ и $\Psi = \Psi(\theta_1)$, определяемые уравнениями (4) и (5), могут быть представлены геометрически. Отрезок $AE = p$ (рис. 1) выстроим в виде звена AN, скользящего в ползуне M, направляющие которого образуют прямой угол. Строим далее повернутый план скоростей ptc основного механизма ABCD и далее находим относительные

скорости скольжения звена M вдоль осей звеньев BC и AN . Отрезок pt повернутый на угол 90° , пропорционален величине Ψ в рассматриваемом положении механизма.

Геометрическими местами точек F и E (рис. 1) будут подеры рассматриваемых линейно огибающих шатунных кривых, если в качестве полюса подер выбрана точка A . Подера, являющаяся геометрическим местом точек E , может быть воспроизведена механически как траектория точки E ползуна M (рис. 2). Уравнения этой подеры в параметрической форме

$$x = -p_1 \cos \theta_1, \quad (11)$$

$$y = p_1 \sin \theta_1, \quad (12)$$

где p_1 определяется уравнением (4). Уравнения подеры, описываемой точкой F (рис. 2):

$$x = -(p_1 \cos \gamma + \sqrt{a^2 - p_1^2} \sin \gamma) \cos (\theta_1 + \gamma), \quad (13)$$

$$y = (p_1 \cos \gamma + \sqrt{a^2 - p_1^2} \sin \gamma) \sin (\theta_1 + \gamma), \quad (14)$$

где p_1 также определяется уравнением (4).

Поступило
21 I 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. Синтез плоских механизмов, 1959.

АСТРОНОМИЯ

В. В. ВИТКЕВИЧ, А. Д. КУЗЬМИН, Р. Л. СОРОЧЕНКО и В. А. УДАЛЬЦОВ

**РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЕ НАБЛЮДЕНИЯ
ВТОРОЙ СОВЕТСКОЙ КОСМИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ**

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 28 I 1960)

1. Широко распространенный в радиоастрономии радиоинтерференционный метод (¹⁻⁴) используется для определения координат дискретных источников радиоизлучения, для исследования неоднородностей ионосферы, для определения координат искусственных спутников Земли и т. п. Этот метод был применен нами для наблюдений за радиосигналами второй советской космической ракеты, достигшей Луны 14 IX 1959 г. Были измерены угловые координаты контейнера с научной аппаратурой, а также интенсивность принимаемого сигнала и определен характер изменения интенсивности во времени.

2. Наблюдения проводились на частоте излучения передатчика, установленного в контейнере, 183,6 Мгц. Использовался радиоинтерферометр, подобный уже описанному в литературе (⁵), с введением некоторых несущественных изменений, связанных с необходимостью сузить полосу радиоприема. Понятно, что если при приеме сигнала шумового характера чувствительность аппаратуры увеличивается пропорционально корню из ширины полосы приема, то при приеме монохроматического сигнала чувствительность обратно пропорциональна корню квадратному из ширины полосы. Нами использовалась полоса пропускания приемника 10 кгц. Первый и второй гетеродины были стабилизированы кварцем. У каждой из двух антенн, представляющих собой усеченные параболические зеркала с размерами около 200 м² каждый, размещались усилительные головки с коэффициентом шума около 5. Прием осуществлялся по методу фазовой модуляции. Для разделения изменений амплитуды сигнала, обусловленных изменением направления на источник и изменением интенсивности самого источника, использовался двоянный радиоинтерферометр, описанный ранее (⁶). Расстояние между антеннами составляло 175,9 м, что соответствовало угловой ширине одного лепестка 32' (при нормальном падении волны). Антенны были расположены приблизительно в направлении востока — запад и принимали сигнал с горизонтальной поляризацией. Сопровождение антенн за контейнером и определение номера лепестка интерференционной диаграммы (порядка интерференции) производились по целеуказаниям, получаемым из координационно-вычислительного центра.

3. При помощи радиоинтерферометра непосредственно измеряется угол между направлением на источник сигнала и нормалью к базе радиоинтерферометра. Величина β определяется через номер лепестка n и параметры интерферометра соотношением

$$\sin \beta = \frac{\lambda}{D} (n - \eta), \quad (1)$$

где λ — длина волны принимаемого сигнала; D — база интерферометра; η — параметр, определяемый разностью электрических длин от каждой

из антенн до места сложения сигналов. При равных электрических длинах $\eta = 0$.

Азимут источника A связан с углом β соотношением

$$\sin \beta = \sin \gamma \cos z + \cos \gamma \sin z \sin (A - \theta), \quad (2)$$

где z — зенитный угол источника; $\gamma = 2^\circ 44'$ — угол между горизонтальной плоскостью и проекцией базы на вертикальную плоскость, проходящую через линию восток — запад; $\theta = -14'$ — угол между линией восток — запад и проекцией базы на горизонтальную плоскость.

Тогда

$$A = \theta + \arcsin \left[\frac{1}{\cos \gamma \sin z} \frac{\lambda}{D} (n - \eta) - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} z \right]. \quad (3)$$

Из пяти параметров (γ , θ , D , λ и η), входящих в соотношение (3), один параметр γ определяется частотой излучения с поправкой на эффект Доплера. Три другие λ , θ и D , являющиеся постоянными, определялись геодезической съемкой взаимного расположения антенн и уточнялись юстировкой. Параметр η , зависящий от электрических длин кабелей и фазовых характеристик входных каскадов, может изменяться во времени, и поэтому определялся перед каждым наблюдением.

Юстировка радиоинтерферометра производилась по интенсивным космическим источникам радиоизлучения Лебедь-А, Телец-А и Дева-А, принятые для которых экваториальные координаты (эпоха 1959,5) и потоки радиоизлучения p приведены в табл. 1.

Таблица 1

Источник	$p_{183,6}$, вт. м ⁻² . Гц ⁻¹	$\alpha_{1959,5}$	$\delta_{1959,5}$
Лебедь-А	$70 \cdot 10^{-24}$	$19^{\text{h}} 58^{\text{m}} 05^{\text{s}}$	$+40^\circ 36',5$
Телец-А	$18 \cdot 10^{-24}$	$5^{\text{h}} 32^{\text{m}} 09^{\text{s}}$	$+21^\circ 59'$
Дева-А	$9 \cdot 10^{-24}$	$12^{\text{h}} 28^{\text{m}} 47^{\text{s}}$	$+12^\circ 34'$

4. Уверенный прием сигнала при приближении к Луне до момента встречи позволил надежно определить время встречи с лунной поверхностью и область прилунения контейнера с научной аппаратурой. Копия интерферен-

ционной записи сигнала на конечном участке траектории по одному из приемных каналов приведена на рис. 1. В момент прекращения сигнала

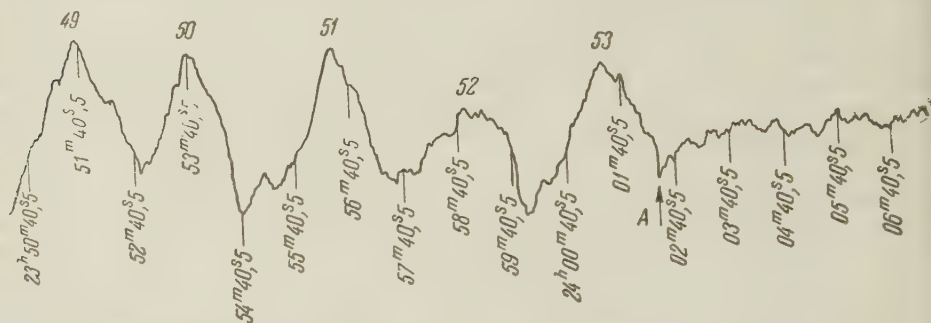


Рис. 1. Интерференционная запись сигнала при приближении контейнера к Луне.
А — момент прекращения сигнала

синусоидальный характер записи, обусловленный интерференцией, сменился экспоненциальным спадом, вызванным прекращением сигнала и наличием постоянной времени. Этот переход отчетливо виден (рис. 1, точка А) и определяет время прекращения сигнала 0 час. 02 мин. 22 сек. ± 1 сек (14 IX 1959 г.).

С учетом времени распространения сигнала от Луны до Земли, равного 1,2 сек., это соответствует времени встречи контейнера с лунной поверхностью 0 час. 02 мин. 21 сек. ± 1 сек.

Время прекращения сигнала (0 час. 2 мин. 22 сек.) соответствует номеру пепстка $n = 53,43$. Для этого значения кривая $A(z, n)$, рассчитанная по формуле (3), пересекает видимый диск Луны.

При пересчете в селенографические координаты с учетом ошибки измерений (равной $\pm 1'$ при усреднении нескольких отсчетов) эта линия трансформируется в область, показанную на рис. 2 штриховкой.

С учетом данных, полученных автоматизированным измерительным комплексом (⁸), следует считать, что районом прилунения контейнера с научной аппаратурой является область, указанная на рис. 2 двойной штриховкой. Селенографические координаты центра этой области следующие: широта $+30^\circ$, долгота -3° (кратер Архимед).

5. Интенсивность принимаемого сигнала определялась сравнением с известным излучением космического источника Лебедь-А. Временная зависимость изменения сигнала, приведенного к изотропному излучателю, находящемуся на расстоянии контейнера, приведена на рис. 3.

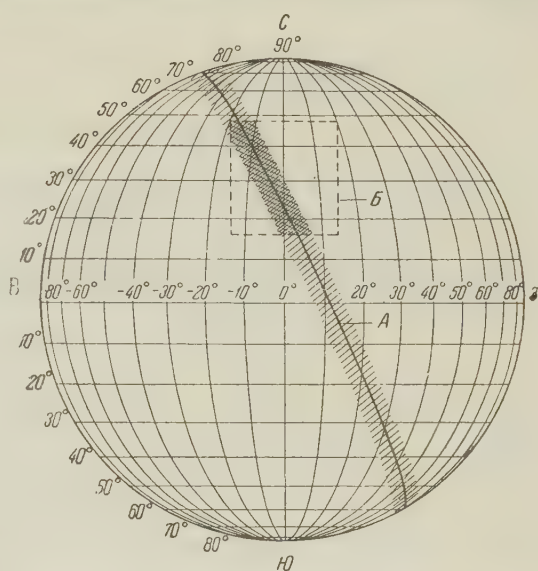


Рис. 2. Прилунение контейнера. Одинарная штриховка — данные радиоинтерферометра. Б — данные автоматизированного комплекса (⁸); двойная штриховка — область «прилунения» контейнера. Координаты селенографические

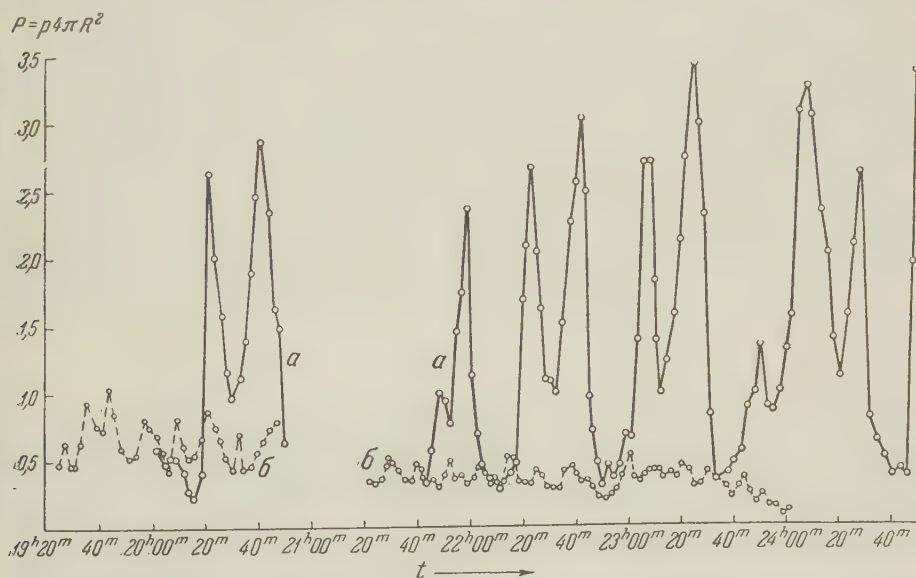


Рис. 3. Временной ход изменения сигнала с исключением эффекта расстояния. а — 12 IX—13 IX 1959 г.; б — 13 IX—14 IX 1959 г.

Наблюдалось несколько характерных периодов изменения интенсивности сигнала: малый около 45 сек. и большой 45 мин. 12 IX 1959 г. и 10—13 мин. 13 IX 1959 г.

Наличие глубоких замираний сигнала может быть обусловлено периодическим изменением ориентации контейнера и эффектом Фарадея в ионосфере.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
2 X 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Виткевич, Астр. журн., 29, № 4, 450 (1952). ² Nature, 180, № 4592, 879 (1957). ³ В. В. Виткевич, Радиотехн. и электроника, 3, № 4, 478 (1958). ⁴ В. В. Виткевич, Ю. Л. Кокурин, Радиотехн. и электроника, 2, № 7, 826 (1957). ⁵ В. В. Виткевич, Тр. 5-го совещ. по вопросам космогонии, Изд. АН СССР, 1956, стр. 14. ⁶ В. В. Виткевич, ДАН, 86, № 1, 39 (1952). ⁷ В. В. Виткевич, Ю. Л. Кокурин, Радиотехн. и электроника, 3, № 2, 1373 (1958). ⁸ Сообщение ТАСС, Правда, 21 IX 1959.

А. А. НИКИТИН

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОЙ ОЦЕНКЕ ТЕМПЕРАТУР ГОРЯЧИХ ЗВЕЗД ПО ХАРАКТЕРУ ЭМИССИОННОГО СПЕКТРА N III

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 3 I 1960)

В спектрах звезд типа W — R ⁽¹⁾, некоторых новых ⁽²⁾, а также в спектрах ряда планетарных туманностей ⁽³⁾ наблюдаются линии эмиссии III, относящиеся к двум группам. Одна группа линий обусловлена переходами между уровнями основных конфигураций $2s^2 + n$ (s, p, d, f, \dots) и вторая связана с уровнями конфигураций $2s2p$ (3P) + n (s, p, d, \dots). Характерными представителями этих групп являются линии $\lambda 4640$ ($3^2P - 3^2D$) и $\lambda 4514,89$ ($3s^4P - 3p^4D$) и др.

Появление первой группы линий качественно объясняется совместным действием механизма рекомбинаций и флуоресцентного механизма Боуэна; объяснение происхождения второй группы в предположении рекомбинационного характера спектра сталкивается с большими трудностями ⁽⁴⁾. Основная трудность состоит в том, что в таком рекомбинационном процессе электрон должен быть захвачен ионом N IV, находящимся не в основном $2s^2 1S_0$, но возбужденном (потенциал возбуждения ~ 8 эв) состоянии $2s2p$ 3P ; хотя это состояние и сильно метастабильно, однако время пребывания атома в нем ограничено.

Из соображений стационарности, однако, следует, что, каков бы ни был механизм образования этих линий, необходимым условием его эффективности должна явиться сравнимость числа ионизаций атома N III с выбросом 2 p -электрона и образования N IV в состоянии $2s^2 1S$ с числом его ионизаций с выбросом 2 s -электрона и образования N IV в $2s2p$ 3P состоянии.

Выясним, при каких условиях будет иметь место эта сравнимость.

Коэффициент поглощения N III, связанный с выбросом 2 p -электрона, был нами вычислен при помощи вариационных волновых функций ⁽⁵⁾ с поправкой за дисторсию электронов, не участвующих в переходе. Асимптотическое выражение его у границы серии имеет вид:]

$$\alpha_v(2s^2 2p^2 P - 2s^2 kd^2 D^2 S) \approx 5 \cdot 10^{-19} \left(\frac{v_{gp}}{v} \right)^2.$$

При вычислении α_v , связанного с выбросом 2 s -электрона, были рассмотрены две возможности: образование иона N IV в состояниях $2s2p$ 3P и $2s2p$ 1P . Учет этого эффекта производился при помощи генеалогических коэффициентов, данных в ⁽⁶⁾, а также соответствующим выбором радиальных частей волновых функций ⁽⁵⁾; поправка за счет дисторсии также оценивалась и оказалась пренебрежимо малой.

Асимптотическое выражение для α_v в первом случае было

$$\alpha_v(2s^2 2p^2 P - 2s 2p(^3P) kp^2 SPD) \approx 2 \cdot 10^{-19} \left(\frac{v_{gp}}{v} \right)^{0,2}.$$

Приближенно можно считать $\alpha_v = 2 \cdot 10^{-19}$ постоянным.

Во втором случае значение α_v у границы серии равнялось

$$\alpha_v(2s^2 2p^2 P - 2s 2p(^3P)kp^2 SPD) \approx 10^{-19} \left(\frac{v_{гр}}{v} \right)^2.$$

Положим, что атомы N III находятся в поле радиации, описываемом формулой Планка с температурой T . Найдем, при каких T будет иметь место указанная выше сравнимость обоих процессов ионизации. Из равенства

$$\int_{\nu_1}^{\infty} \frac{\alpha_v(1) I_\nu}{h\nu} d\nu = \int_{\nu_2}^{\infty} \frac{\alpha_v(2) I_\nu}{h\nu} d\nu$$

находим нужное соотношение

$$I_1^2 + 2I_1 kT + 2(kT)^2 \approx \alpha I_2 e^{(I_1 - I_2)/kT}; \quad (1)$$

$I_2 = 47,4$ эв, $I_1 = 55,8$ эв — потенциалы ионизаций N III с выбросом соответственно $2p$ - и $2s$ -электронов (в состояние 3P N IV); $\alpha \sim 2$, как это следует из оценок α_v , данных выше. При $T \sim 5 \cdot 10^4$ правая часть (1) существенно больше левой — ионизация с выбросом 2 s -электронов мала. Если T заключено между 10^5 и $2 \cdot 10^5$, то число ионизаций N III с выбросом 2 s -электронов и число ионизаций с выбросом 2 p -электронов сравнимы между собой, и потому в спектрах звезд и туманностей с такой высокой температурой следует ожидать появления линий N III второй группы; наоборот, появление в спектрах звезд этих линий должно являться индикатором высоких температур рассматриваемых объектов.

Если обратиться к звездам W — R, изученным в ⁽¹⁾, то можно заметить, что в спектрах таких звезд, как BD + 37,3821, BD + 35,4001, которым приписывается высокая ионизационная температура ($\sim 10^5$), весьма интенсивны линии N III второй группы (суммарная интенсивность в произвольной шкале равна соответственно 121 и 88); наоборот, в спектрах BD + 35,3987, BD + 38,4010, которым в ⁽¹⁾ приписываются более низкие температуры, суммарная интенсивность линий второй группы мала (23 и 31).

В спектре Новой Геркулеса 1934 г. наблюдениями ⁽²⁾ обнаружены две линии N III второй группы λ 4510,92 и 4514,89 ($3s^4P - 3p^4D$) наряду с линиями первой группы. Присутствие этих линий, наряду с линиями [Ne V], O IV, говорит о высокой температуре оболочки новой в это время.

В спектрах планетарных туманностей, таких как NGC 2440, 7009, 7662, по данным ⁽³⁾, также имеются указанные линии второй группы (отождествление, на наш взгляд, дискуссионно), причем ядра всех этих туманностей имеют температуры $\sim 10^5$. Более точные расчеты требуют более детального знания характера рекомбинационного спектра N III.

Поступило
31 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. Aller, Ap. J., 97, № 2 (1943). ² P. Swings, O. Struve, Ap. J., 92, № 2 (1940). ³ A. Wyse, Ap. J., 95, № 3 (1942). ⁴ А. А. Никитин, Астр. журн. № 5 (1959). ⁵ L. Goldberg, O. Klogston, Phys. Rev., 56, № 10 (1939). ⁶ R. Bacher, S. Goudsmit, Phys. Rev., 46, 948 (1934).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. Н. ГОВОРУН

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ АНТЕНН (ПЕРВОГО РОДА)**

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 3 I 1960)

В работе ⁽¹⁾ были получены интегральные уравнения (11) и (12) Фредгольма первого рода для плотности электрического тока в антенне, представляющей собой тело вращения с импедансной поверхностью. В данной работе рассматривается вопрос о единственности решения указанных интегральных уравнений для случая идеально проводящей антенны.

Приняты обозначения: S — поверхность антенны; G — область внутри нее; D — область вне S ; система координат цилиндрическая (z, ρ, φ) ; остальные обозначения те же, что и в ⁽¹⁾, только везде $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$.

Предполагается, что поверхность S и рассматриваемые функции на поверхности (E_t и j) удовлетворяют всем условиям гладкости, необходимым для существования и единственности решения внешней краевой задачи электродинамики (см., например, ^(2, 3)).

1. Уравнение для плотности меридионального тока (уравнение (12) работы ⁽¹⁾)

$$\int_L \left[\cos \theta' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho' \partial z} + \sin \theta' \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \right) \right] j_1^{(n)} \rho' dl' + i\omega \varepsilon \int_L \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} E_{\tau 1} \rho' dl' = 0. \quad (I)$$

Это уравнение соответствует случаю осесимметричного поля с продольным возбуждением электрического типа $\mathbf{H} = \{0, 0, H_\varphi(\rho, z)\}$ и получается в ⁽¹⁾ из требования равенства нулю на оси z в области G производной по ρ от магнитного вектора поля

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad (1)$$

выражаемого формулой Стреттона — Чу для внешней задачи.

Кроме того, из уравнений Максвелла следует, что H_φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho} \right) - \left(\frac{1}{\rho^2} - k^2 \right) H_\varphi = 0. \quad (2)$$

Рассматривая поведение аналитического в G решения уравнения (2) при $\rho \rightarrow 0$, получаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$H_\varphi = \text{const} \cdot \rho H(\rho, z), \quad H(0, z) \neq 0, \quad (3)$$

откуда следует, что уравнение (2) имеет только тривиальное решение $H_\varphi \equiv 0$, удовлетворяющее условию (1). Другими словами, имеет место общее утверждение:

Осесимметричное электромагнитное поле электрического типа $\mathbf{H} = \{0, 0, H_\varphi(\rho, z)\}$, имеющее производную по ρ от магнитного вектора поля, равную нулю на оси симметрии, будет равно нулю всюду в области аналитичности данного поля.

Отсюда следует, что электромагнитное поле, даваемое для внешней задачи формулами Стреттона — Чу с подставленными в них заданными возбуждением E'_{τ_0} и значением j_{τ_0} , найденным из уравнения (I), будет тождественно равно нулю всюду в области G , т. е. $H(M) \equiv 0$, $E(M) \equiv 0$ при $M \in G$, где

$$\begin{aligned} H(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\epsilon [\mathbf{n}(N) \mathbf{E}(N)] \phi(M, N) - [\mathbf{j}_{\tau_0} \text{grad}' \phi]\} dS, \\ E(M) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\mu \mathbf{j}_{\tau_0} \phi(M, N) + [[\mathbf{n}(N) \mathbf{E}(N)] \text{grad}' \phi] + \\ &\quad + (\mathbf{n}(N) \mathbf{E}(N)) \text{grad}' \phi\} dS, \end{aligned} \quad (4)$$

$$[\mathbf{n}(N) \mathbf{E}(N)] = -E'_{\tau_0} [\mathbf{n}(N) \vec{\tau}(N)], \quad (\mathbf{n}(N) \mathbf{E}(N)) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \left(\frac{\cos \theta'}{\rho'} j_{\tau_0} - \frac{\partial j_{\tau_0}}{\partial l'} \right).$$

Рассматривая максвелловское поле, даваемое формулами (4) в области D , и устремляя точку M из D к поверхности S , а также устремляя точку M к S в формулах (4) для $M \in G$, получаем для тангенциальных составляющих векторов поля на поверхности S значения

$$[\mathbf{nH}]|_S = \mathbf{j}_{\tau_0}, \quad [\mathbf{nE}]|_S = -E'_{\tau_0} [\mathbf{n}\vec{\tau}],$$

т. е. тангенциальная составляющая электрического вектора принимает на поверхности заданное значение.

Далее, поскольку условия излучения выполняются автоматически, поле, определяемое формулами Стреттона — Чу, и будет решением внешней краевой задачи электродинамики. Из единственности ее решения следует единственность решения уравнения (I).

2. Уравнение для плотности азимутального тока (первое из уравнений (11) в работе (1)).

$$\int_L \frac{\partial \phi}{\partial \rho'} j_2^{(0)} \rho' dl' = \int_L \left[\left(i\omega\epsilon \phi \sin \theta' + \frac{\cos \theta'}{i\omega\mu \rho'} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) E'_{\tau_0} - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial E'_{\tau_0}}{\partial l'} \right] \rho' dl'. \quad (11)$$

Это уравнение соответствует случаю осесимметричного возбуждения магнитного типа $\mathbf{E} = \{0, 0, E_\phi\}$ и было в (1) получено из требования равенства нулю на оси z в области G z -й компоненты магнитного вектора поля, даваемого формулой Стреттона — Чу для внешней задачи.

Из уравнения Максвелла $\frac{E_\phi}{\rho} + \frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} = -i\omega\mu H_z$ и условия $H_z|_{\rho=0} = 0$ находим,

что $\frac{\partial E_\phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0$. Кроме того, E_ϕ также удовлетворяет уравнению (2).

Далее, как и в п. 1, следует утверждение:

Осесимметричное поле магнитного типа $\mathbf{E} = \{0, 0, E_\phi\}$, z -я компонента магнитного вектора которого равна нулю на оси симметрии, будет равно нулю всюду в области аналитичности данного поля.

Как и в предыдущем пункте, отсюда следует единственность решения интегрального уравнения первого рода для азимутальной составляющей плотности тока.

3. Уравнения первого рода для внешней скалярной волновой задачи и уравнения для первых гармоник плотности тока.

а) При нахождении решения внешней краевой задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ могут быть применены интегральные уравнения второго и первого рода, аналогичные уравнениям в (1) для плотности электрического тока. Здесь рассматриваются только уравнения первого рода.

В качестве исходного уравнения для нахождения $\partial u / \partial n$ на S (первая задача) или u (вторая задача) используется скалярная формула Грина, написанная для внешней задачи:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial n_N} \psi(M, N) - u \frac{\partial \psi}{\partial n_N} \right) ds = 0, \quad M \in G. \quad (5)$$

Здесь $\psi(M, N) = e^{ikr} / r$, $r = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 + 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}$.

Из единственности решения внешней задачи и из свойств потенциалов простого и двойного слоев (см. (2)) следует, что уравнение (5) как для первой, так и для второй задачи имеет единственное решение. Используя аналитичность (5) по z и по ρ внутри области G , требуем удовлетворения (5) не во всей области G , а только в некоторой ее подобласти с объемом, не равным нулю. При этом (5) будет выполняться снова во всей области G , т. е. единственность решения уравнения сохраняется. Далее, требуя выполнения (5) только для точек M , лежащих на оси z , получаем уравнение

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n_N} \psi(M, N) \Big|_{\rho=0} \rho' dl' = \int_L u \frac{\partial \psi}{\partial n_N} \Big|_{\rho=0} \rho' dl', \quad (6)$$

которое, вообще говоря, будет иметь уже не единственное решение. И только в осесимметричном случае, используя уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$, можно показать (аналогично тому, как это сделано в п. 1), что как для первой, так и для второй краевой задачи уравнение (6) будет иметь единственное решение. Другими словами, ядра уравнений

$$\psi(M, N)|_{\rho=0} = \psi(l, l') = \frac{e^{ikr}}{r} \rho'(l'), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n_N} \Big|_{\rho=0} = \frac{\partial \psi}{\partial n_N}(l, l') = \left(\cos \theta' \frac{\partial \psi}{\partial z'} + \sin \theta' \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \right) \rho'(l') \quad (8)$$

будут замкнуты (обозначения см. (11) в (1)).

б) Исследование единственности решения для второго и третьего уравнений в (11) из (1) не удается осуществить, используя аналитические свойства максвелловских полей.

Однако нетрудно видеть, что для антенны с бесконечно проводящей поверхностью ($\zeta_1 = \zeta_2 = 0$) ядро уравнения для первой гармоники плотности меридионального тока (третье уравнение в (11) из (1))

$$\begin{aligned} & \int_L \left(\cos \theta' \frac{\partial \psi}{\partial z'} + \sin \theta' \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \right) j_{1m}^{(1)} \rho' dl' = \\ & = \int_L \left\{ i\omega \epsilon \psi E'_{\tau m} - \frac{1}{i\omega \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \left[\frac{E'_{\tau m}}{\rho'} + \lambda \left(\frac{\partial E'_{\varphi n}}{\partial l'} - \frac{\cos \theta'}{\rho'} E'_{\varphi n} \right) \right] \right\} \rho' dl' \end{aligned} \quad (III)$$

$$(m = s, n = c, \lambda = -1 \text{ или } m = c, n = s, \lambda = 1)$$

будет тождественно ядру уравнения для осесимметричной скалярной задачи (8), замкнутость которого доказана выше. Отсюда и следует единственность решения уравнения (III).

Второе уравнение в (11) (для первой гармоники азимутальной составляющей плотности тока) в случае $\zeta_2 = 0$

$$\int_L \frac{\partial \psi}{\partial z} j_{2m}^{(1)} \rho' dl' = \int_L i\omega \epsilon \psi \cos \theta' E'_{\varphi m} \rho' dl' \quad (m = s \text{ или } m = c) \quad (IV)$$

будет иметь неединственное решение вида $v = v_1 + cv_0$, где c — произвольная постоянная, v_1 — некоторое частное решение уравнения, а v_0 —

$$\int_L \phi(l, l') \nu_0(l') \rho' dl' = 1; \quad (9)$$

$\phi(l, l')$ см. формулу (7). Вопрос о существовании решения уравнения (9) не будем рассматривать, укажем только, что для поверхностей S и значений k , для которых уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial \psi(M, N)}{\partial n_N} \nu(N) dS - \nu(M) = 0, \quad M, N \in S,$$

не имеет собственных значений, решение (9) существует. Очевидно также, что решение существует и для бесконечного цилиндра (решение равно константе). Поэтому для нахождения первой гармоники азимутальной составляющей плотности тока предлагается использовать уравнение

$$\int_L \left\{ \left[k^2 \phi + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} + \zeta_2 \left(\cos \theta' \frac{\partial \psi}{\partial z'} + \sin \theta' \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \right) i \omega \varepsilon \right] j_{2m}^{(1)} - \right. \\ \left. - \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \left(\frac{\partial j_{1n}^{(1)}}{\partial l'} - \frac{\cos \theta'}{\rho'} j_{1n}^{(1)} \right) \right\} \rho' dl' = i \omega \varepsilon \int_L \left(\cos \theta' \frac{\partial \psi}{\partial z'} + \sin \theta' \frac{\partial \psi}{\partial \rho'} \right) E'_{\varphi m} \rho' dl' \quad (10)$$

$$(m = s, n = c, \lambda = -1 \text{ или } m = c, n = s, \lambda = 1),$$

полученное таким же способом, как и уравнения (I), (II), (III), (IV) в (1), но исходя из требования $E|_{\rho=0} = 0$.

Вопрос о существовании решений в уравнениях (I), (II), (III), (IV) в (1) и в (6), (10) не обсуждается, поскольку из существования решения для внешней краевой задачи электродинамики и для скалярного волнового уравнения следует существование решений в рассматриваемых уравнениях.

Отметим, что результаты, полученные в пп. 1 и 2, могут быть обобщены и на случай задачи с краевым условием Леонтовича ($\zeta_1 \neq 0$, $\zeta_2 \neq 0$).

В заключение автор выражает глубокую признательность научному руководителю проф. А. А. Самарскому.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило
25 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Г о в о р у н, ДАН, 126, № 1 (1959). ² В. Д. К у п р а д з е, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, 1950. ³ W. K. S a u n d e r s, Proc. Nat. Acad. Sci. of USA, 38, № 4 (1952).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. С. КРОНРОД

**ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ЖЕЛЕЗЕ С УЧЕТОМ НАСЫЩЕНИЯ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 I 1960)

В плоском случае уравнение для магнитного потенциала $u(x, y)$ в железе выглядит так:

$$\frac{\partial [\varphi \partial u / \partial x]}{\partial x} + \frac{\partial [\varphi \partial u / \partial y]}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(|\text{grad } u|^2)$ — величина, обратная магнитной проницаемости железа $\varphi = 1/\mu$. Краевые условия обычные, для дальнейшего они роли не играют.

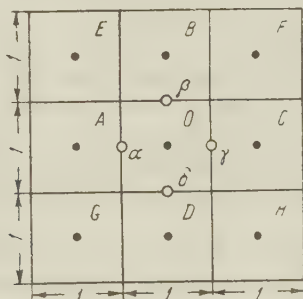


Рис. 1

Уравнение (1) естественно приводится к конечноразностной форме (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\alpha} &= u(0) - u(A), & \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\gamma} &= u(C) - u(0), \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\beta} &= u(B) - u(0), & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\delta} &= u(0) - u(D); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \varphi \left\{ [u(0) - u(A)]^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 [u(B) + u(E) - u(G) - u(D)]^2 \right\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi(\delta) &= \varphi \left\{ [u(D) - u(0)]^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 [u(A) + u(G) - u(C) - u(H)]^2 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

и, наконец,

$$\left[\left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{\gamma} - \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{\alpha} \right] + \left[\left(\varphi \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{\beta} - \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{\delta} \right] = 0 \quad (4)$$

или, согласно (2),

$$u_{\text{нов}}(0) = K(\alpha)u(A) + K(\beta)u(B) + K(\gamma)u(C) + K(\delta)u(D), \quad (5)$$

где

$$K_1(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta)}, \dots, K(\delta) = \frac{\varphi(\delta)}{\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta)}. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) — уравнения стационарного распределения тепла с переменным коэффициентом теплопроводности φ , имеющим обычный вид как на рис. 2. Однако для больших градиентов формулы (5) и (6) не дают сходящегося процесса. Введение замедления путем, например, замены уравнения (1) на

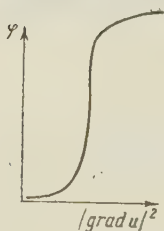


Рис. 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial [\varphi \frac{\partial u}{\partial x}]}{\partial x} + \frac{\partial [\varphi \frac{\partial u}{\partial y}]}{\partial y} \quad (1^A)$$

приводит, конечно, к цели, однако шаг по времени приходится брать малым, так что современные скорости электронных машин оказываются недостаточными.

Предлагается для численного решения таких задач следующий алгоритм.

Для каждой точки O закрепляются значения соседних $u(A), \dots, u(C)$. Ищется $u_{\text{нов}}(0)$ такое, что уравнение (5) удовлетворяется при условии, что в (3) вместо $u(0)$ стоит $u_{\text{нов}}(0)$. (Такие измененные условия (3) назовем (3^A) .) Эту процедуру можно назвать локально обратным шагом.

Теперь процесс сходится в смысле числа итераций быстрее, чем аналогичный процесс для уравнения Лапласа, если только φ — монотонно убывающая функция своего аргумента. Это тривиально, если воспринимать уравнение (1) как тепловое, а монотонность φ — как рост теплопроводности с градиентом температуры.

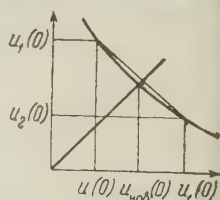


Рис. 3

Для фактических вычислений нет нужды решать уравнения (5), (6) и (3^A) совместно. Например, совершенно достаточно положить

$$u_1(0) = K(\alpha)u(A) + \dots,$$

где $K(\alpha), \dots, K(\delta)$ вычислены из (3);

$$u_2(0) = K_1(\alpha)u(A) + \dots,$$

где $K_1(\alpha), \dots, K_1(\delta)$ вычислено из (3), когда $u(0)$ заменено на $u_1(0)$, и, наконец,

$$u_{\text{нов}}(0) = u(0) + \frac{[u_2(0) - u_1(0)]^2}{2u_1(0) - u_1(0) - u_2(0)},$$

т. е. сделать две итерации с последующей интерполяцией:

$$u_1(0) = f[u(0)], \quad u_2(0) = f[u_1(0)].$$

Ищем $u_{\text{нов}}(0)$ так, чтобы прямая, проходящая через $u(0)$, $u_1(0)$ и $u_2(0)$, пересекала в $u_{\text{нов}}(0)$, $u_{\text{нов}}(0)$ биссектрису первого квадранта (рис. 3).

Соответствующие расчеты проведены на релейной вычислительной машине Бессонова (РВМ).

Институт экспериментальной и теоретической физики
Академии наук СССР

Поступило
3 XI 1959

Член-корреспондент АН СССР Е. Ф. ГРОСС и А. А. КАПЛЯНСКИЙ

ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ,
ВЫЗВАННАЯ ЯВЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ.
КВАДРУПОЛЬНОЕ ЭКСИТОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ
СВЕТА В ЗАКИСИ МЕДИ

На длинноволновом крае основного поглощения Cu_2O наблюдается сложная структура в виде двух водородоподобных серий линий поглощения, связанных с возбуждением экситонов Мотта в решетке Cu_2O (см. обзор (1)). С длинноволновой стороны от «желтой» серии, подчиняющейся формуле $\nu_n = (17460 - 785/n^2) \text{ см}^{-1}$ для линий с номером $n \geq 2$, наблюдается значительно более слабая и узкая по сравнению с остальными членами этой серии линия $\lambda 6125 \text{ \AA}$, которой условно приписывается номер $n = 1$. Согласно существующей интерпретации эта линия отвечает возбуждению низшего, основного состояния экситонов ($n = 1$), причем значительное отклонение ее положения от требуемого сериальной формулой Ридберга объясняется малым радиусом экситонов в этом состоянии, из-за чего водородоподобная модель Ванье — Мотта непригодна для расчета энергии состояния.

При исследовании спектров поглощения Cu_2O на монокристаллических образцах ($T = 77^\circ\text{K}$) нами было обнаружено необычное для кубических кристаллов явление анизотропного поглощения света в линии с $n = 1$ ($\lambda 6125 \text{ \AA}$)* (4). Оказалось, что в спектре света, прошедшего через пластинку Cu_2O , интенсивность линии поглощения $\lambda 6125 \text{ \AA}$ в двух произвольных взаимно перпендикулярных состояниях поляризации является в общем случае неодинаковой. Степень поляризации линии, так же как и интегральная интенсивность ее, сильно менялась для различных образцов, а также у одного кристалла при изменении направления прохождения света через пластинку. Естественно было предполагать, что эти изменения связаны с различной ориентировкой кристаллографических осей в разных образцах.

Представляло интерес выяснить зависимость интенсивности и поляризации линии $\lambda 6125 \text{ \AA}$ от направления распространения света в кристаллической решетке образца. С этой целью был выращен достаточно крупный монокристалл Cu_2O . Далее по полученным методом Лауэ рентгенограммам определялась ориентировка кристаллических осей в образце, а затем из него вырезались пластинки, различно ориентированные относительно кристаллографических осей. В частности, были вырезаны пластинки одинаковой толщины с плоскостями, перпендикулярными кристаллографическим осям симметрии 4-го (C_4), 3-го (C_3) и 2-го (C_2) порядков. Исследование поглощения света в $\lambda 6125 \text{ \AA}$ производилось в таких, вырезанных из одного монокристалла пластинках, а также в отдельных независимых монокристаллических образцах с определенной по лауэграммам ориентировкой осей**.

* Анизотропия поглощения света в линии сохранялась как при охлаждении образцов до $T = 4,2^\circ\text{K}$, так и при нагревании их до температур, близких к 0°C (пока линия не становилась ненаблюдаемой из-за теплового уширения).

** Авторы благодарны М. А. Румшу и В. Н. Щемелеву за рентгенографическое определение ориентировок в некоторых из исследовавшихся нами образцов Cu_2O .

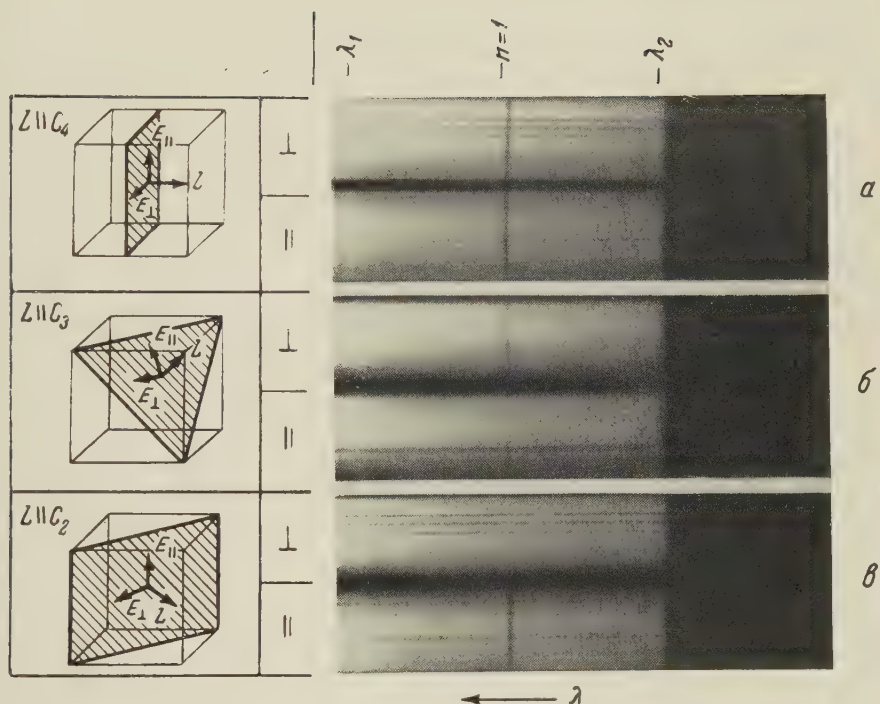


Рис. 1. Спектрограммы линии поглощения $n = 1$ ($\lambda 6125 \text{ \AA}$) желтой серии экситона в SiO_2 при прохождении поляризованного света в направлении L через монокристаллические пластинки, вырезанные по различным кристаллографическим плоскостям (заштрихованы), перпендикулярным осям симметрии 4-го, 3-го и 2-го порядка (C_4 , C_3 и C_2). $\lambda_1 6164 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 6086 \text{ \AA}$ — длинноволновые края ступенек сплошного поглощения

Этими исследованиями установлено, что интенсивность и степень поляризации линии $\lambda 6125 \text{ \AA}$ полностью определяются ориентацией луча света (т. е. направления наблюдения) относительно осей кристаллической решетки образца (рис. 1). При нормальном падении света на пластинку, плоскость которой совпадает с плоскостью кристаллографического куба ($L \parallel C_4$), линия поглощения относительно интенсивна и неполяризована (рис. 1, а). При нормальном падении света на пластинку, плоскость которой является плоскостью кристаллографического октаэдра ($L \parallel C_3$), линия также неполяризована, однако интенсивность ее значительно ниже, чем при $L \parallel C_4$ (рис. 1, б). При нормальном падении света на пластинку, плоскость которой соответствует кристаллографической плоскости ромбодекаэдра ($L \parallel C_2$), линия интенсивна и полностью поляризована с электрическим вектором E , перпендикулярным плоскости куба, в которой лежит ось C_2 , являющаяся направлением наблюдения (рис. 1, в). Описанный характер поглощения в линии имеет место соответственно при наблюдении вдоль всех осей симметрии кристалла четвертого ($3C_4$), третьего ($4C_3$) и второго ($6C_2$) порядков.

В общем случае, когда L не совпадает с осями симметрии кристалла, линия $\lambda 6125 \text{ \AA}$ является частично поляризованной. Изменение интенсивности и поляризации линии для наиболее характерных случаев постепенного перехода направления наблюдения от одной оси симметрии к другой схематически показано на рис. 2. Система координат совмещена здесь с тройкой осей куба ($3C_4$) и направление луча L определяется углами ϑ и φ . Будем рассматривать интенсивность линии в двух взаимно перпендикулярных состояниях поляризации, соответствующих колебаниям электрического вектора E в содержащей L меридиональной плоскости I_ϑ и нормально к ней I_φ . С величинами I_ϑ и I_φ на рис. 2 связана длина волн λ , показывающих соответствующее направление колебаний E .

При изменении направления наблюдения от положения $L \parallel C_4 (\parallel Ox)$ к $L \parallel C_2 (\parallel Oy)$ таким образом, что оно остается в плоскости куба xOy , угол φ постепенно растет от 0° (где $L \parallel C_4$ и $I_\vartheta = I_\varphi$), интенсивность I_ϑ не изменяется, а I_φ монотонно уменьшается. При $\varphi = \pi/4$, соответствующем направлению луча вдоль C_2 , I_φ становится равной нулю, т. е. линия оказывается полностью поляризованной. При дальнейшем увеличении угла φ интенсивность I_φ вновь становится заметной и усиливается, равняясь при $\varphi = \pi/2$ ($L \parallel Oy \parallel C_4$) с оставшейся неизменной I_ϑ . Пусть теперь изменение направления наблюдения от положения $L \parallel C_2 (\parallel Oy)$ к $L \parallel C_4 (\parallel Oz)$ происходит таким образом, что L остается в плоскости ромбодекаэдра zOy . При $\vartheta = \pi/2$ ($L \parallel C_2$) линия полностью поляризована ($I_\varphi = 0$). При уменьшении ϑ наблюдается появление и усиление I_φ и, наоборот, значительное ослабление I_ϑ . При ϑ , близком к $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, соответствующем направлению наблюдения вдоль C_3 , интенсивности уравняются $I_\vartheta = I_\varphi$. При дальнейшем уменьшении ϑ интенсивность I_φ становится больше I_ϑ . При приближении ϑ к 0° растут интенсивности в обоих компонентах поляризации и при $L \parallel Oz \parallel C_4$ интенсивности вновь сравниваются $I_\vartheta = I_\varphi$. Описанное поведение линии при наиболее характерных

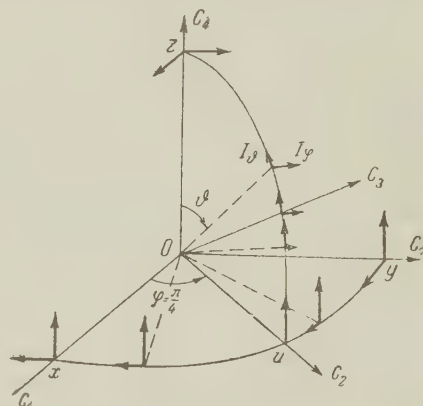


Рис. 2. Схема интенсивности и состояния поляризации линии поглощения $\lambda 6125 \text{ \AA}$ в зависимости от направления распространения света в кристаллической решетке Cu_2O

изменениях направления наблюдения в пределах одного октанта имеет совершенно аналогичный вид для всех других октантов. Таким образом, пространственное распределение интенсивности и состояния поляризации линии обладает элементами симметрии куба и по отношению к поглощению в линии $\lambda 6125 \text{ \AA}$ кристалл Cu_2O имеет — если учитывать только поляризацию, но не интенсивность поглощения — 7 «оптических осей» ($3C_4$ и $4C_3$), вдоль которых поглощение изотропно.

Обнаруженная оптическая анизотропия поглощения кубического кристалла Cu_2O является необъяснимой в рамках обычной кристаллооптики, в которой кубические кристаллы оптически изотропны. Не представляется возможным истолковать явление и как результат какой-то «некубичности» решетки Cu_2O , а также отнести его к разряду явлений, наблюдаемых в кубических кристаллах, содержащих локальные анизотропные центры*. Против этих предположений говорит прежде всего тот факт, что пространственное распределение интенсивности и поляризации поглощения в линии обладает элементами симметрии кубического кристалла.

Анизотропия линии поглощения $\lambda 6125 \text{ \AA}$ кубического кристалла Cu_2O может быть объяснена, по нашему мнению, тем, что соответствующий линии оптический переход является не обычным дипольным, а переходом высшей мультипольности — электрическим квадрупольным переходом. Действительно, наблюдаемая зависимость интенсивности и поляризации линии от направления луча в решетке соответствует пространственному распределению поля электрической квадрупольной системы, которая эквивалентна трем элементарным плоским квадрупольям, расположенным в решетке нормально к трем осям C_4 , либо четырем линейным квадрупольям, ориентированным вдоль четырех осей C_3 . Согласно (⁶⁻⁸) излучение (поглощение) такой квадрупольной системы в направлениях координатных осей куба ($3C_4$) должно быть неполяризованным, в направлениях плоскостных диагоналей куба ($6C_2$) полностью поляризованным с E , параллельным оси куба, перпендикулярной к диагонали, и в направлениях пространственных диагоналей куба ($4C_3$) неполяризованным, с интенсивностью в три раза меньшей, чем для $L \parallel C_4$. Именно такой характер имеет экспериментальная зависимость для линии $\lambda 6125 \text{ \AA}$ в спектре Cu_2O , что непосредственно указывает на то, что поглощение в линии $\lambda 6125 \text{ \AA}$ является чисто квадрупольным**.

Насколько нам известно, квадрупольные оптические переходы в твердом теле (как и вообще в конденсированной фазе) экспериментально ранее никогда не наблюдались; не наблюдалась и связанная с такими переходами оптическая анизотропия кубических кристаллов. Что касается теоретического рассмотрения вопроса, то интересно отметить, что еще в работах Г. А. Лорентца по электронной теории дисперсии кристаллов в высшем приближении теории получалось, что кубические кристаллы обладают двулучепреломлением(¹¹). При этом двулучепреломление максимально при распространении света вдоль $6C_2$ и отсутствует при распространении света вдоль осей $3C_4$ и $4C_3$ (т. е. кубические кристаллы оптически семиосны!) По мнению Хельвеге (⁹) физический смысл этого высшего приближения, дающего анизотропию, состоит в учете вклада в дисперсию кристалла, помимо обычного дипольного взаимодействия света с веществом,

* Этот факт состоит в появлении дихроизма поглощения в спектрах центров в результате анизотропных фотохимических превращений центров под действием поляризованного света (⁵).

** Предположение о квадруполье объясняет наблюдаемое характерное явление, которое трудно понять для дипольного поглощения света. Оно состоит в том, что при повороте кристалла Cu_2O вокруг вертикальной оси и наблюдении в горизонтальном направлении в спектре поглощения имеют место изменения интенсивности линии $\lambda 6125 \text{ \AA}$ в обоих компонентах поляризации с колебаниями E и в горизонтальной и в вертикальной плоскостях. Это особенно заметно, когда L , меняющееся в горизонтально расположенной плоскости ромбододекаэдра, проходит через направление C_3 .

а также и квадрупольного взаимодействия. В ⁽⁹⁾ показано, что квадрупольные переходы могут привести и к анизотропному излучению и поглощению света кубическими кристаллами. Наши экспериментальные результаты, таким образом, подтверждают предсказание Хельвеге о возможности анизотропии оптического поглощения кубических кристаллов за счет квадрупольных переходов. В последнее время возможность оптической анизотропии кубических кристаллов была теоретически показана в исследованиях Пекара ⁽¹²⁾ и Пекара и сотр. ⁽¹³⁾ по распространению света в кристаллах, в которых возникают экситоны, и в работе Гинзбурга ⁽¹⁴⁾, где учитывалась пространственная дисперсия света.

Установленный квадрупольный характер поглощения света в линии 6125 Å согласуется с наблюдаемой малой интенсивностью линии и свидетельствует в пользу экситонной интерпретации линии. Действительно, обычно наблюдаемый коэффициент разрешенного дипольного поглощения света в основной решетке кристаллов имеет величину $k \approx 10^6 \text{ см}^{-1}$, что дает для коэффициента квадрупольного поглощения в основной решетке (интенсивность его относится к дипольной как $(2\pi a/\lambda)^2 \approx 10^{-6}$, где a — размер порядка атомного) величину, согласующуюся с оцененной на опыте ($k \approx 10 \text{ см}^{-1}$) ⁽¹⁰⁾ для линии $n = 1$. Квадрупольность линии может объяснить и наблюдаемое отсутствие реэмиссии из основного состояния экситонов в Si_2O , ибо при малой вероятности оптического квадрупольного перехода (время жизни $\approx 0,1$ сек.) возбужденное состояние всегда будет разрушено в каком-либо конкурирующем процессе аннигиляции.

Следует отметить, что анизотропное поглощение наблюдалось нами только у линии λ 6125 Å. Изучение поглощения света в других элементах структуры края поглощения Si_2O — в ступеньках, в линиях желтой серии экситона с $n \geq 2$, а также так называемых «новых» линиях, расположенных между членами желтой серии и наблюдаемых при $T = 4,2^\circ \text{ K}$, показало, что оно является изотропным. Это указывает на специфичность основного состояния экситона в Si_2O по сравнению с возбужденными экситонными состояниями.

Экспериментальное обнаружение квадрупольного перехода в линии $n = 1$ спектра экситона в Si_2O ставит существенные дополнительные требования к теории основного экситонного состояния кристалла. В этой теории должны быть запрещены дипольные переходы в основное экситонное состояние и разрешены квадрупольные. Интересно отметить в этой связи, что квадрупольность линии соответствует выводам Эллиота ⁽³⁾ о запрещенности дипольных переходов в основное состояние экситона Si_2O , однако использованная в ⁽³⁾ водородоподобная модель вряд ли пригодна для экситона малого радиуса с $n = 1$. В то же время модель Жилича ⁽²⁾, дающая согласующееся с экспериментом значение энергии возбуждения основного состояния экситона, приводит к разрешению дипольных переходов в это состояние.

Физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступило
2 II 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Ф. Гросс, Усп. физ. наук, **63**, 575 (1957); Nuovo Cim. Suppl., **4**, 672 (1957).
А. Г. Жилич, Вестн. ЛГУ, № 4 (1957). ³ R. S. Elliott, Phys. Rev., **108**, 384 (1957). ⁴ Е. Ф. Гросс, А. А. Каплянский, Физ. тверд. тела, **2**, № 2 (1960). ⁵ П. П. Феофилов, Усп. физ. наук, **58**, 69 (1956). ⁶ A. Rubincz, J. Blaton, Ergebn. d. Exakt. Naturwiss., **11**, 176 (1932). ⁷ М. А. Ельяшеч, Спектры редких земель, 1953. ⁸ Д. Стрэттон, Теория электромагнетизма, 148. ⁹ К. Н. Hellwege, Zs. f. Phys., **129**, 626 (1951). ¹⁰ И. Пастернак, кандидатская диссертация, Физ.-техн. инст. АН СССР, 1959. ¹¹ H. A. Lorentz, Verh. k. Akad. v. Wet. Amsterdam, **18** (1879). ¹² С. И. Пекар, ЖЭТФ, **33**, 1022 (1957); **4**, 1176 (1958); **36**, 451 (1959). ¹³ С. И. Пекар, Б. Е. Цеквава, Физ. тверд. тела, **2**, 261, 482 (1960). ¹⁴ В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **34**, 1593 (1958).

В. В. КЛЮШИН

ВЛИЯНИЕ НЕЙТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА КРИВУЮ НАМАГНИЧИВАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ КРЕМНИСТОГО ЖЕЛЕЗА

(Представлено академиком И. К. Кикоиным 3 I 1960)

В последние годы значительное внимание уделяется исследованиям изменений свойств вещества после облучения его нейтронами. Среди многочисленных работ, посвященных исследованиям физических (механических, электрических и др.) свойств вещества, мало работ, касающихся ферромагнетизма.

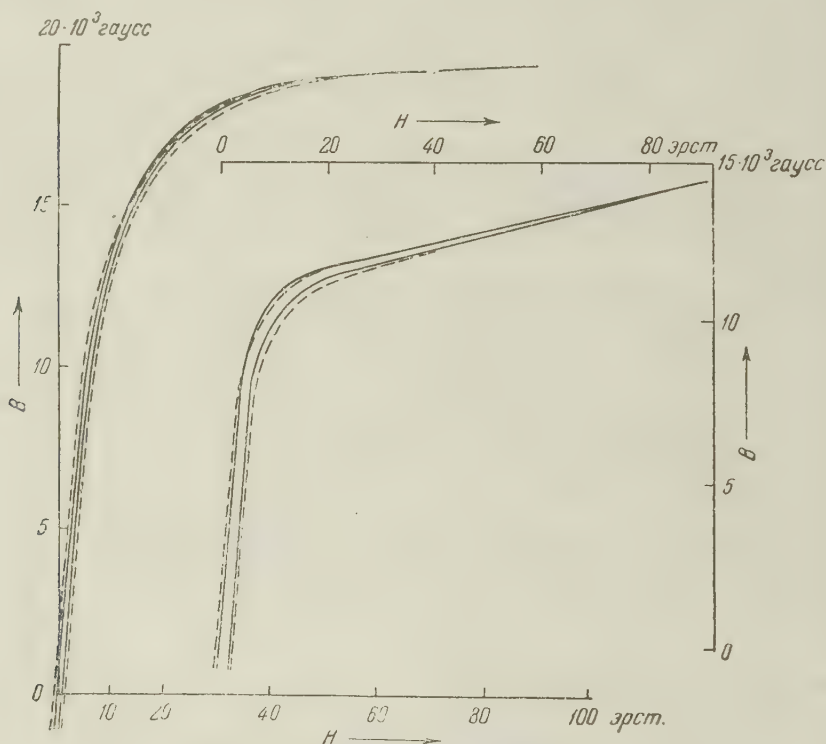


Рис. 1. Петли гистерезиса монокристалла кремнистого железа. Кривые слева—в направлении [001]. Кривые справа — в направлении [111]. Сплошные линии—до облучения. Пунктирные линии — после облучения в реакторе

Настоящая работа посвящена исследованию влияния нейтронного облучения на кривую намагничивания монокристаллов кремнистого железа (3% Si). Исследования на монокристаллах, возможно, позволят выяснить, по крайней мере качественно, влияние облучения нейтронами на ход процессов смещения границ ферромагнитных областей и вращения намагниченности в них.

Исходным материалом для исследования служили монокристаллы трансформаторной стали, выросшие в результате отжига после холодной прокатки листов промышленной стали. По данным рентгенографического анализа нескольких монокристаллов выбран монокристалл, у которого оси [001], [011] и [111] с точностью $2-3^\circ$ совпадают с плоскостью листа. Образцы размером $70 \times 2 \times 0,5$ мм³ получены вытравливанием вдоль указанных кристаллографических направлений.

Кривые намагничивания образцов снимались до и после облучения при комнатной температуре при помощи астатического магнитометра. Каждый образец во время измерений и облучения находился в алюминиевом контейнере. Контейнер с образцом после облучения помещался в свинцовый цилиндр в центре одного из соленоидов магнитометра точно в такое же положение, какое он занимал при измерениях до облучения. Свинцовый цилиндр служил защитой от остаточного γ -излучения исследуемых образцов. Интегральная доза облучения в реакторе составляла $4,7 \cdot 10^{18}$ н/см². Температура в канале реактора поддерживалась около 50° .

Результаты измерений представлены на рис. 1. Как видно из кривых, петли гистерезиса монокристаллов кремнистого железа уширяются в результате облучения нейтронами. Относительное изменение кривой гистерезиса для монокристалла, намагниченного вдоль направления [001], значительно больше, чем вдоль направления [111]. Коэрцитивная сила монокристалла в направлении [001] увеличилась с 0,3 до 0,8 эрст. (с точностью $\pm 0,1$ эрст.), в направлении [111] увеличилась с 1 до 1,2—1,3 эрст. Облучение нейтронами, по-видимому, влияет в основном на процессы смещения границ между ферромагнитными областями.

Полученные данные, имеющие пока предварительный характер, не дают еще возможности полностью выяснить механизм, вызвавший изменение кривой намагничивания. Можно предполагать, что при сравнительно высоких температурах наблюдаемые изменения магнитных свойств исследованных монокристаллов связаны главным образом с появлением так называемых «зон смещения». Дальнейшие более детальные опыты позволяют уточнить существующие представления о механизме нарушений кристаллической решетки, вызванных облучением тяжелыми частицами.

Институт физики металлов
Академии наук СССР

Поступило
19 XII 1959

И. М. ИМЯНИТОВ и Е. В. ЧУБАРИНА

СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ ПО ДАННЫМ ИССЛЕДОВАНИЙ ВО ВРЕМЯ МЕЖДУНАРОДНОГО ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ГОДА

(Представлено академиком А. Ф. Исффе 3 I 1960)

До настоящего времени еще не разрешен вопрос о природе электрического поля атмосферы, хотя существует ряд гипотез, объясняющих его существование. Наиболее часто применяется модель «шарового конденсатора» (¹, ²). Косвенным подтверждением этой модели является тесная корреляция между суточным ходом интенсивности грозовой деятельности на всей Земле и суточным ходом напряженности электростатического поля над океанами и в полярных областях, где она мало нарушена местными объемными зарядами (унитарная вариация).

Теория шарового конденсатора предполагает: 1) монотонное убывание электростатического поля с высотой и, соответственно, монотонное возрастание потенциала с высотой; потенциал ионосферы, рассчитанный по предполагаемому ходу проводимости с высотой, принимается равным ~ 400 кв; 2) соответствие фазы и амплитуды суточных колебаний величины потенциала ионосферы фазе и амплитуде унитарной вариации, наблюдаемой на Земле; 3) синфазность изменений и одинаковость значений потенциала высоких слоев на одном и том же уровне над всеми точками наблюдения.

Рациональность гипотез, объясняющих происхождение электрического поля атмосферы, можно оценить исследованиями его хода с высотой (⁴).

Во время Международного геофизического года и Международного геофизического сотрудничества в СССР были организованы регулярные зондирования электрического поля атмосферы при помощи самолета ЛИ-2 в Ленинграде, Киеве и Ташкенте (приборы и методику измерений см. в (⁸)).

При зондированиях измерялся ход напряженности электростатического поля E с высотой H . Потенциал соответствующей точки рассчитывался путем интегрирования экспериментальной кривой $E = f(H)$. Надо учесть, что основная часть сопротивления атмосферы сосредоточена в ее нижних слоях (⁴). Так, в слое 0—6 км сосредоточено около 66% всего сопротивления атмосферы, поэтому можно предполагать, что потенциал на высоте 6 км не должен отличаться от потенциала ионосферы более чем на 30—35%; поэтому изменения потенциала на высоте 6 км должны в основном быть подобны изменениям потенциала ионосферы. Нарушения этого подобия могут происходить за счет отклонений проводимости атмосферы от «нормальных» значений. Так как эти отклонения происходят в основном в слое 0—3÷4 км и приводят обычно к уменьшению проводимости, то вычисленные значения потенциала ионосферы могут оказаться несколько завышенными (⁴).

Обработка данных измерений дала следующие результаты:

1. Монотонный ход напряженности поля с высотой, даже в ясные дни, часто нарушается. Наряду с экспоненциальным убыванием с высотой H поля $E = E_0 e^{-aH}$ (a меняется от 10^{-3} до $1,5 \cdot 10^{-3}$, если h измерять в метрах), встречается ряд случаев, когда на некоторой высоте (чаще 3000—4000 м) напряженность поля падает до нуля или становится устойчиво отрицательной. Отмечаются случаи, когда электрическое поле с высотой почти не меняется, сохраняя до больших высот значение от 0,25—0,35 в/см. Нередко наблюдается ход поля, при котором напряженность имеет максимум на высоте от нескольких сот метров до нескольких километров, располагаю-

ийся обычно под границей температурной инверсии ⁽⁹⁾. Выше максимума напряженность меняет знак и становится отрицательной.

2. Монотонное возрастание потенциала с высотой также часто нарушается даже в ясную погоду (рис. 1).

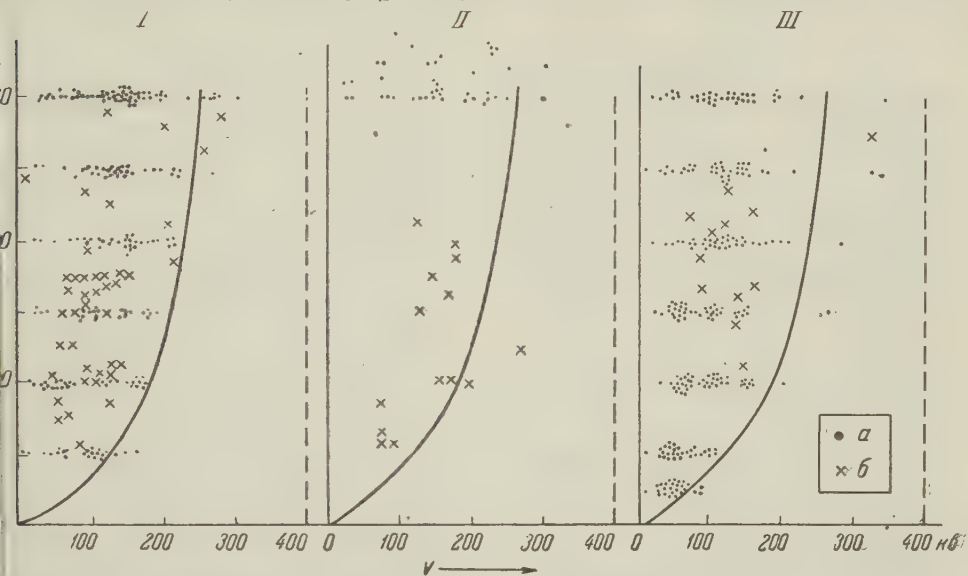


рис. 1. Ход электрического потенциала с высотой. I — Ленинград, 1958 г. (75 подъемов); II — Киев, 1958 г. (50 подъемов); III — Ташкент, 1958 г. (50 подъемов). Сплошная кривая — ход по Гишу (см., например, ⁽²⁾); а — измеренные величины потенциала; б — высоты, где кривая изменения потенциала с высотой имеет максимум, т. е. выше потенциал убывает

3. Наиболее вероятная величина потенциала на высоте 6000 м оказалась ниже ожидаемой. Как видно из табл. 1, она лежит в пределах от 120 до 160 кв, наиболее вероятное значение потенциала ионосферы составляет таким образом около 200—250 кв.

4. Суточные изменения потенциала на высоте 6000 м чаще всего не подобны унитарной вариации и различны для всех трех пунктов наблюдения. Однако и то же время (рис. 2 А). Относительные колебания потенциала:

Таблица 1

Повторяемость величины потенциала на высоте 6000 м в 1958 г. (число случаев).
Ожидаемое по схеме Гиша ⁽²⁾ значение потенциала на высоте 6000 м +280 кв,
потенциал ионосферы +400 кв

	Диапазон изменения потенциала в кв									
	<-200	-200÷-160	-160÷-120	-120÷-80	-80÷-40	-40÷0	0÷40	40÷80	80÷120	120÷160
Ленинград	2	2	3	4	2	5	8	26	38	40
Киев	4	5	4	4	6	5	7	12	21	25
Ташкент (март и сентябрь)	1	1	1	1	1	1	4	10	17	15
	160÷200	200÷240	240÷280	280÷320	320÷360	360÷400	400÷440	440÷480	480÷520	>520
Ленинград	36	23	22	10	8	5	2	2	2	2
Киев	23	15	12	6	5	4	2	2	1	1
Ташкент (март и сентябрь)	7	3	3	2	4	3	2	1	1	1

в течение суток на высотах от 500 до 6000 м имеют тенденцию к уменьшению с высотой. На высоте 3000—4000 м часто наблюдаются наименьшие колебания потенциала, причем выше относительные колебания потенциала часто снова увеличиваются. В суточном ходе потенциала на различных высотах часто наблюдается смещение максимума с высотой (рис. 2 Б). На высотах 200—300 м в Ленинграде и Киеве унитарная вариация напряженности поля проявляется довольно четко (рис. 4), выше и ниже начинает размываться, и максимум кривой начинает смещаться.

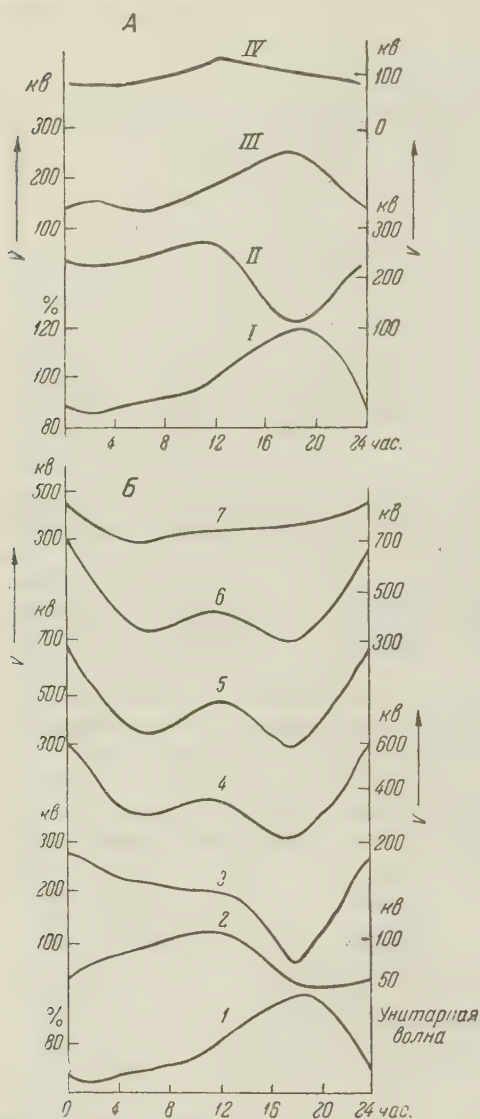


Рис. 2. А — унитарная вариация (I) и суточные изменения потенциала (II, III, IV) на высоте 6000 м в сентябре 1958 г. в ясные дни: II — по Ленинграду; III — по Киеву; IV — по Ташкенту. Б — унитарная волна (I) и суточный ход потенциала на высотах от 500 до 6000 м в Ташкенте в ясные дни июня 1958 г. (2 — 7): 2 — 500 м; 3 — 1000 м; 4 — 2000 м; 5 — 3000 м; 6 — 4000 м; 7 — 6000 м

Таким образом, модель «шарового конденсатора» не нашла в наших опытах подтверждения.

Интерпретировать полученные результаты можно, если перейти от модели шарового конденсатора к модели заряженного шара, окруженного объемным зарядом. Так как на уровне Земли в полярных, горных и океанических областях наблюдается унитарная волна⁽⁵⁻⁷⁾ и отмечается хорошая корреляция между унитарной волной поля и суточным ходом грозовой активности по всему земному шару⁽³⁾, то можно считать, что токи, текущие на Землю в районах с грозой, подзаряжают ее, и суточный ход напряженности поля вблизи поверхности Земли есть, в сущности, ход плотности поверхностного заряда Земли там, где он не нарушен местными объемными зарядами.

Земля окружена объемным зарядом, поле которого накладывается на поле ее поверхностного заряда, и колебания его «смазывают» колебания унитарной вариации, поэтому колебания потенциала на высотах обусловлены изменениями в распределении и величине объемного заряда атмосферы. Часто объемный заряд в слое 3—4 км уже таков, что поле его полностью компенсирует поле поверхностного заряда Земли.

Если из измеряемой напряженности поля вычесть напряженность поля, создаваемую собственным зарядом Земли (E унитарное), то в первом приближении можно выделить поле, обусловленное объемным зарядом атмосферы. Пример подобного анализа приведен на рис. 3. Как видно, колебания измеряемого потенциала даже при ненарушенных условиях в основном повторяют колебания потенциала, обусловленного объемным зарядом атмосферы. Все районы земного шара можно разделить на три области:

I — области генерации объемного заряда. К ним надо отнести все области, покрытые облаками; профиль электрического поля в этих случаях, как правило, резко нарушен.

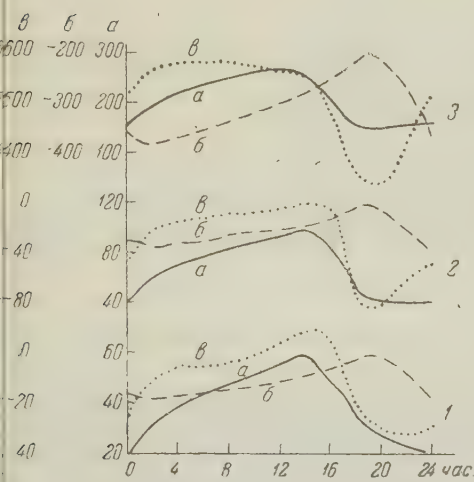


Рис. 3. Суточный ход потенциала на высотах 100 м (1), 1000 м (2) и 5000 м (3) в ясные дни июня 1958 г. в Ленинграде. *a* — измеренный потенциал; *b* — потенциал, обусловленный объемным зарядом Земли; *в* — потенциал, обусловленный объемным зарядом атмосферы

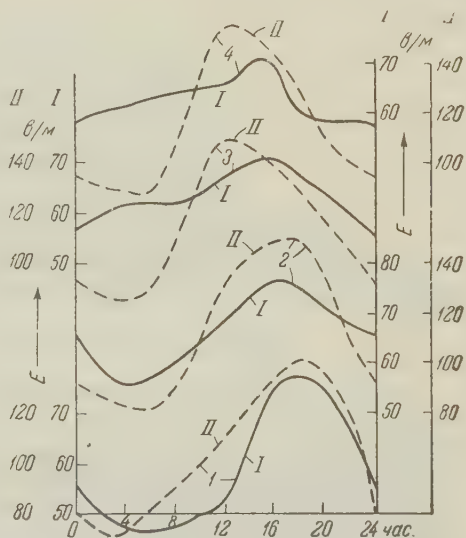


Рис. 4. Суточный ход поля на высотах от 200 до 500 м в ясные дни 1958 г. *I* — по Ленинграду, *II* — по Киеву. *I* — 200 м; *2* — 300 м; *3* — 400 м; *4* — 500 м

II — области, где монотонность изменения напряженности электрического поля с высотой нарушается внесенными из области I объемными зарядами. Этим случаям должны соответствовать профили, отступающие от экспоненты. Тип профиля зависит от величины и распределения заряда столбе атмосферы.

III — области, где объемный заряд всего столба атмосферы мал и не оказывает существенного влияния на поле поверхностного заряда Земли. В этих областях как на Земле, так и на высоте должна проявляться унитарная вариация.

Тот факт, что унитарная вариация наблюдается в «нарушенных» облаках (типа области II) только на определенных высотах (~ 200—300 м) (рис. 4), объясняется тем, что поля объемных зарядов, расположенных выше и ниже этого уровня (для Ленинграда) уравновешивают друг друга, позволяя проявиться в чистом виде полю собственного заряда Земли.

Итак, опыты по зондированию электрического поля атмосферы не подтвердили положений теории сферического конденсатора. Судя по результатам измерений, очевидно, закономернее перейти от модели сферического конденсатора к модели заряженного шара, окруженного объемным зарядом. Чтобы более серьезно обосновать эту модель, необходимо дальнейшее изучение поведения объемного заряда атмосферы, условий его генерации, распространения и распределения в атмосфере.

Главная геофизическая обсерватория
им. А. И. Воейкова

Поступило
29 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Н. Тверской, Атмосферное электричество, Л., 1949.
- ² H. Israel, Atmosphärische Elektrizität, Leipzig, 1957.
- ³ F. Whipple, F. Scrase, Geophys. Mem., 7, № 68 (1936).
- ⁴ И. М. Имянитов, Информ. сборн. ком. ГУГМС по проведению МГГ, № 5, 1958, стр. 12.
- ⁵ S. J. Mauchly, Res. Department of Terrestrial Magnetism, 5, 387 (1926).
- ⁶ H. I. Swerdrup, Res. Department of Terrestrial Magnetism, 6 (1927).
- ⁷ Т. В. Лободин, Информ. сборн. ком. ГУГМС по проведению МГГ, № 7, 1959.
- ⁸ И. М. Имянитов, Приборы и методы для изучения электричества атмосферы, М., 1957.
- ⁹ И. М. Имянитов, Тр. Главн. геофиз. obs., в. 35, 3 (1952).

В. Л. КАЛИХМАН и Я. С. УМАНСКИЙ

ИЗУЧЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ СТАДИЙ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ДИФфуЗИОННОЙ ПОРИСТОСТИ В СПЛАВАХ Л62 И Н80Х20 МЕТОДОМ МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ

(Представлено академиком Г. В. Курдюмовым 29 XII 1959)

Исследованию образования диффузионной пористости при отгонке летучей компоненты из различных сплавов посвящен ряд работ (¹⁻³), в результате которых установлено, что процесс этот в известной степени аналогичен процессу выделения второй фазы из пересыщенных твердых растворов.

Мы изучили процесс образования пор в α -латуни (Л62) и в сплаве Н80Х20 (нихром) на начальных его стадиях. Был применен метод рассеяния рентгеновских лучей под малыми углами.

Съемки рентгенограмм производились в вакуумной камере со щелевым устройством, собранным по схеме Кратки (⁴), см. рис. 1) из концевых мер



Рис. 1. 1 — первая щель; 2 — «низ» второй щели;
3 — «верх» второй щели; 4 — ловушка первичного пучка

(плиток Иоганссона) на хорошо притертых стальных направляющих. Ширина первой щели составляла 100 μ , длина около 10 мм. В работе использовалось фильтрованное медное излучение. Толщина применявшегося никелевого фильтра составляла 7 μ .

Для выращивания крупных зерен образцы Л62 перед отгонкой цинка отжигались в атмосфере насыщающих паров цинка при температуре 750° в течение одного часа, образцы из сплава Н80Х20 — в насыщающих парах хрома при температуре 1200° также в течение одного часа. Зерна в латунных образцах выросли до 0,1 мм, в нихромовых — до 0,5 мм.

Толщина образцов, подвергавшихся рентгенографированию, составляла 30 μ . Изготавливались они либо путем прокатки на ручном двухвалковом стане до конечной толщины, либо шлифованием на тонкой шлифовальной бумаге с обеих сторон более толстой фольги.

Приготовленные таким способом образцы, из которых не отгонялась летучая компонента, не дали заметного малоуглового рассеяния. Это говорит о том, что в данном случае эффектом двойного вульф-брегговского отражения можно пренебречь.

Обнаружено, что малоугловое рассеяние от образцов Л62, из которых цинк отгонялся в запаянной откачанной ампуле при температуре 800° в течение одного часа, неравномерно вдоль длины щели (рис. 2, а). Аналогичную картину дают образцы из Л62, представляющие собой извлеченную для рентгеновского анализа сердцевину фольги с толщиной, равной 90 μ , из которой цинк отгонялся при непрерывной откачке в течение 5 мин. при температуре 750° (рис. 2, б).

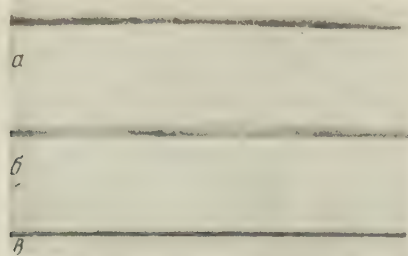


Рис. 2

К статье М. Н. Ильинской, стр. 185

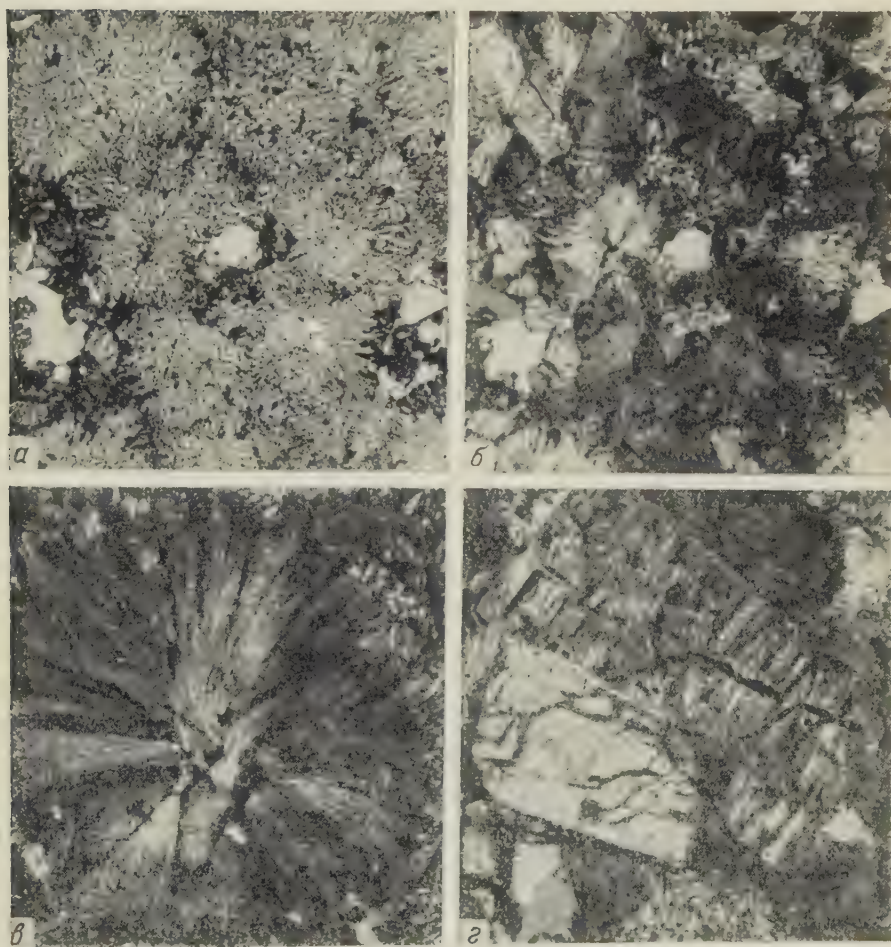


Рис. 2. Микрофотографии породы. а — 45 × при одном николе; б — 45 ×, николи +; в, г — 58 ×, николи +

Малоугловая картина, полученная от образцов Н80Х20, отожженных запаянной откачанной ампуле в течение одного часа при температуре 1000° , также характеризуется неравномерностью почернения вдоль длины щели. После отгонки летучей компоненты в течение 5 мин. при непрерывной откачке из тех же образцов при соответствующих температурах картина малоуглового рассеяния становится равномерной вдоль длины щели (рис. 2, в табл. Л62).

Наиболее вероятной причиной обнаруженного эффекта является неравномерность пор при одинаковой их ориентировке в пределах одного зерна. В ряде работ, например ⁽⁵⁾, показано, что в этом случае малоугловая картина должна быть неравномерной вдоль длины щели.

По всей вероятности, поры зарождаются на поверхности пластинчатых частиц примесей, закономерно ориентированных по отношению к основному металлу. На начальных стадиях развития поры представляют собой тонкие щели, расположенные вдоль этих поверхностей. Такое объяснение обнаруженного явления хорошо согласуется с тем фактом, что очистка стали от примесей сильно уменьшает образование пор при отгонке водорода ⁽⁶⁾.

Московский институт стали
им. И. В. Сталина

Поступило
28 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Е. Гегузин, Усп. физ. наук, **11**, в. 2, 217 (1957). ² С. М. Астраханцев, Я. С. Уманский, Изв. Высш. учебн. зав., Цветная металлургия, № 6 (1958).
³ J. Blin, C. R., **232**, № 20 (1954). ⁴ O. Kratky, Kolloid-Zs., **144**, 110 (1955).
⁵ A. Guinier, G. Fournett, Small-Angle Scattering of X-Rays, London, 1955.
⁶ R. Resnic, L. Seigle, J. Appl. Phys., **28**, № 4 (1957).

Г. Г. ДВОРЯНКИНА и З. Г. ПИНСКЕР

ЭЛЕКТРОНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ Fe_3O_4

(Представлено академиком Н. В. Беловым 29 XII 1959)

Как показали магнитные ⁽¹⁾ и электрические ^(2,3) измерения, а также нейтронографические исследования ^(4,5), магнетит Fe_3O_4 имеет структуру «обращенной» шпинели ^(6,2,3). В этой структуре 8 тетраэдрических пустот в кубической плотной упаковке ионов кислорода заняты 8 трехвалентными ионами железа и в 16 октаэдрических пустотах неупорядоченно распределены 8 двухвалентных ионов железа и оставшиеся 8 ионов Fe^{3+} .

На основе такой структурной модели хорошо объясняются замечательные электрические ^(2,3,7-9) и магнитные ^(1,10) свойства магнетита, благодаря которым он является ценным техническим материалом.

Положение кислорода в структуре шпинели фиксируется одним параметром u , который в случае идеальной шпинели равен 0,375. В реальных шпинельных структурах обычно $u > 0,375$. Например, для магнезиевого феррита MgFe_2O_4 было найдено $u = 0,381$ ^(11,12).

Специальных работ по определению параметра u в структуре Fe_3O_4 представлено не было. В рентгеновском исследовании ⁽¹³⁾, посвященном определению рассеивающей способности кислорода и железа для рентгеновских лучей, в котором автор исходил из структуры «нормальной» шпинели для Fe_3O_4 , было попутно установлено значение параметра $u = 0,379 \pm \pm 0,001$. Однако это определение по ряду причин нельзя считать достоверным. В работе ⁽⁷⁾ было получено для параметра u значение 0,379 путем вычисления весьма приближенным методом минимума общего потенциала решетки.

В настоящей работе мы поставили перед собой задачу уточнения структуры Fe_3O_4 электронографическим исследованием тонких слоев.

Образцы Fe_3O_4 готовились из пленок железа, полученных возгонкой металла в вакууме и осаждением на скол NaCl путем отжига этих пленок в высоком вакууме в течение 4 час. при температуре 300—350° и охлаждения до комнатной температуры на воздухе.

Электронограммы, снятые нами от трех образцов, отвечали дифракции от поликристалла. Расчет дал возможность интерпретировать полученную картину как дифракцию от Fe_3O_4 . Период решетки, определенный нами при использовании в качестве эталона линий от NaCl, равнялся $8,40 \pm \pm 0,01$ Å. Интенсивности первых 46 линий измерялись путем микрофотометрирования электронограмм с кратными экспозициями с последующим построением кривых почернения. Интенсивности 28 дальних линий были измерены из одной электронограммы путем фотометрирования ее и применения формулы

$$I \sim \log \frac{I_{\text{фона}}}{I_{\text{макс}}}$$

Таким образом были получены интенсивности 74 линий, соответствующих 153 рефлексам, вследствие закономерного слияния на электронограммах от поликристалла рефлексов с одним и тем же межплоскостным

асстоянием d_{hkl} . Для определения интенсивностей таких рефлексов их суммарная экспериментальная интенсивность разделялась в отношении теоретических интенсивностей. Эти последние, а также $\Phi_{\text{теор}}$ вычислялись для пространственной группы $O_h^7 - Fd3m$ с началом координат в центре симметрии при следующих положениях атомов: 8FeIb(a); 16FeIIb(d) и 2Ob(e). При этом параметр кислорода $u = 0,25$, что соответствует $u = 0,375$ при выборе начала координат в FeI. Атомные факторы для Fe и O были взяты из новых таблиц $f_{\text{эл}}$ (¹⁴). При $u = 0,25$ кислород вносит вклад в структурные амплитуды тех рефлексов, у которых $h + k = 4n$; $+l = 4n$; $l + h = 4n$. Остальные рефлексы образуются только за счет рассеяния атомами железа*.

$\Phi_{\text{теор}}$, умноженные на температурный фактор ($B_{\text{Fe}} = 0,3 \text{ \AA}^2$, $B_{\text{O}} = 0,5 \text{ \AA}^2$), равнялись с $\Phi_{\text{эксп}}$ для каждого из трех образцов отдельно. Оказалось, что в интенсивности для двух образцов требовалось введение динамической поправки, для одного образца рассеяние можно было считать чисто кинематическим. Сопоставление $\Phi_{\text{теор}}$ с усредненными после введения динамической поправки (¹⁶) $\Phi_{\text{эксп}}$ дало фактор расходимости $R = 18,5\%$.

Для дальнейшего исследования был выбран образец с кинематическим рассеянием, что обеспечивало более объективное определение параметра u , чем для образцов, в которые вносилась динамическая поправка.

Для уточнения кислородного параметра методом минимизации фактора расходимости из рефлексов, интенсивности которых определялись микрофотометрическим методом с использованием кратных экспозиций, были выбраны 16 рефлексов с $h + k = 4n$, $k + l = 4n$; $l + h = 4n$. Минимальный фактор $R = 11,7\%$ был получен для $u = 0,263$. При таком положении кислорода вносит вклад уже во все отражения hkl . Используя этот параметр, мы определяли распределение катионов в решетке Fe_3O_4 , равняя $\Phi_{\text{эксп}}$ с $\Phi_{\text{теор}}$ для двух моделей нормальной и «обращенной» шпинели.

$$1) \quad h + k = 4n, \quad k + l = 4n, \quad l + h = 4n + 2;$$

$$A = 32 \{ \cos 2\pi lz \cos \pi(h + k)(x + y) \cos \pi(h - k)(x - y) + \\ + \sin 2\pi lz \sin \pi(h - k)(x + y) \cos \pi(h + k)(x - y) + \\ + \cos 2\pi lx \cos \pi(h + k)(y + z) \cos \pi(h - k)(y - z) + \\ + \sin 2\pi lx \sin \pi(h - k)(y + z) \cos \pi(h + k)(y - z) + \\ + \cos 2\pi ly \cos \pi(h + k)(z + x) \cos \pi(h - k)(z - x) + \\ + \sin 2\pi ly \sin \pi(h - k)(z + x) \cos \pi(h + k)(z - x) \};$$

$$B = 0; \quad F_{hkl} = F_{\bar{h}\bar{k}\bar{l}} = F_{\bar{h}kl} = -F_{h\bar{k}l} = F_{h\bar{k}\bar{l}}.$$

$$2) \quad h + k = 4n + 2, \quad k + l = 4n, \quad l + h = 4n;$$

$$h \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow h \text{ в } 1).$$

$$3) \quad h + k = 4n, \quad k + l = 4n + 2, \quad l + h = 4n;$$

$$h \rightarrow l \rightarrow k \rightarrow h \text{ в } 1).$$

Для облегчения расчетов были взяты не все рефлексы, а только 20 первых отражений, факторы рассеяния $f_{\text{эл}}$ для ионов Fe^{2+} , Fe^{3+} и O^2 были вычислены интерполяцией из рентгеновских данных. Учет ионного состояния влиял только на $\Phi_{\text{теор}}$ двух первых отражений: (111) и (220) $\sin \theta/\lambda$ равным 0,103 и 0,169 \AA^{-1} . Для структуры нормальной шпинели был получен фактор $R = 12,6\%$, для «обращенной» $R = 11,2\%$. Сравне-

* При вычислении структурных амплитуд для трех групп отражений: 1) $h + k = 4n$, $l = 4n$, $l + h = 4n + 2$; 2) $h + k = 4n + 2$, $k + l = 4n$, $l + h = 4n$; 3) $h + k = 4n$, $l = 4n + 2$, $l + h = 4n$, мы нашли, что структурные факторы и соотношения между ними (связки) для этих групп рефлексов в новом издании Интернациональных таблиц (¹⁴) неверно. Нам были выведены правильные формулы структурных факторов и связки этих групп отражений из общей формулы для структурного фактора.

ние $\Phi_{\text{теор}}$, вычисленных для всех 153 рефлексов ($\sin \theta/\lambda$ от 0,103 до 1,136 \AA^{-1}) с использованием модели «обращенной» шпинели и параметра $u = 0,263$, с $\Phi_{\text{эксп}}$ дало $R = 15,7\%$, причем совпадающие экспериментальные отражения разделялись в соответствии с новыми $\Phi_{\text{теор}}$. По $\Phi_{\text{эксп}}$ было построено одномерное сечение трехмерного ряда потенциала по направлению [111]. На сечении Ф-ряда кислород сдвинулся из положения $u = 0,263$ в положение $u = 0,258$.

При помощи этого значения u были рассчитаны новые $\Phi_{\text{теор}}$, а экспериментальные разделены в отношении этих теоретических. Фактор расходимости $R = 15,4\%$.

На сечении Ф-ряда по [111] (рис. 1), построенном по этим $\Phi_{\text{эксп}}$, положение кислорода не изменилось. Таким образом, нами был получен кислородный параметр $u = 0,258 \pm 0,002$.

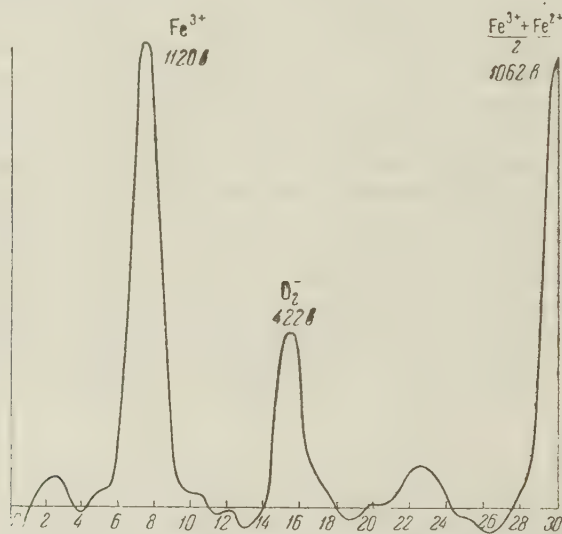


Рис. 1. Одномерное сечение Ф-ряда по направлению [111] в структуре Fe_3O_4

Высоты пиков на синтезе были нормированы к вольтам. Небольшое различие высот максимумов потенциалов кислорода и железа в $1/8^1/8^1/8$ (тетраэдр) 1120 в и в $1/2^1/2^1/2$ (октаэдр) 1062 в еще раз подтверждает «обращенную» структуру шпинели магнетита.

Отношение высот максимумов потенциалов кислорода и железа (с учетом $\varphi(000)$), равное здесь 452В/1150В = 0,393, можно сравнить⁽¹⁷⁾ с отношением (Z_o/Z_{Fe}) 0,75 = 0,414. Таким образом, наблюдается небольшое уменьшение рассеивающей способности кислорода по отношению к железу, что подтверждает ионное состояние кислорода и железа в Fe_3O_4 .

Далее представляло интерес вычислить расстояние между O^{2-} и ближайшими ионами железа в тетраэдрическом и октаэдрическом положениях и сопоставить их с суммами ионных радиусов. Ионные радиусы по Гольдшмидту⁽¹⁸⁾ для координационного числа 6: $r_{\text{Fe}^{2+}} = 0,83 \text{ \AA}$; $r_{\text{Fe}^{3+}} = 0,67 \text{ \AA}$, $r_{\text{O}^{2-}} = 1,32 \text{ \AA}$ дают расстояния

$$r_{\text{Fe}^{2+}} + r_{\text{O}^{2-}} = 2,15 \text{ \AA}, \quad r_{\text{Fe}^{3+}} + r_{\text{O}^{2-}} = 1,99 \text{ \AA}, \quad 1/2(r_{\text{Fe}^{2+}} + r_{\text{Fe}^{3+}}) = 2,07 \text{ \AA}.$$

Сокращение для координационного числа 4 ионных радиусов приблизительно на 4% приводит к расстояниям:

$$r'_{\text{Fe}^{2+}} + r'_{\text{O}^{2-}} = 2,06 \text{ \AA}, \quad r'_{\text{Fe}^{3+}} + r'_{\text{O}^{2-}} = 1,91 \text{ \AA}.$$

Экспериментальные расстояния, вычисленные для параметра $u=0,258$, дающие: кислород — центр октаэдра 2,03 Å, кислород — центр тетраэдра 1,935 Å, т. е. в хорошем согласии с указанными суммами.

Институт кристаллографии
Академии наук СССР

Поступило
7 XII 1959

Институт неорганической химии
Сибирского отделения Академии наук СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. W. Gorter, *Nature*, **165**, 798 (1950). ² E. J. W. Verwey, J. H. de
er, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, **55**, 531 (1936). ³ E. J. W. Verwey, E. L. Heil-
mann, *J. Chem. Phys.*, **15**, 174 (1947). ⁴ C. G. Shull, E. O. Wollau,
J. Koehler, *Phys. Rev.*, **84**, 912 (1951). ⁵ Р. П. Озеров, *Усп. физ. наук*, **67**,
3 (1952). ⁶ T. F. W. Barth, E. Posnjak, *Zs. Kristallogr.*, **82**, 325 (1932).
J. W. Verwey, P. W. Haayman, F. C. Romeijn, *J. Chem. Phys.*, **15**,
(1947). ⁸ E. J. W. Verwey, *Nature*, **144**, 327 (1939). ⁹ E. J. W. Verwey,
W. Haayman, E. L. Heilmann, *Philips techn. Rundschau*, **9**, 239 (1947).
N. Néel, *Ann. d. Phys.*, **3**, 137 (1948). ¹¹ G. E. Bacon, F. F. Roberts,
Acta Crystallogr., **6**, 57 (1953). ¹² L. M. Cerliss, J. M. Hastings, F. G. Brock-
ton, *Phys. Rev.*, **90**, 1013 (1953). ¹³ A. A. Claassen, *Proc. Phys. Soc. London*,
482 (1926). ¹⁴ J. A. Ibers, *Acta Crystallogr.*, **11**, 178 (1958). ¹⁵ International
Tables for X-Ray Crystallography, **1**, 1952, p. 510. ¹⁶ Г. Г. Дворянкина,
Г. Пинскер, *Кристаллография*, **3**, в. 4, 438 (1958). ¹⁷ Б. К. Вайнштейн,
Структурная электронография, 1956. ¹⁸ Б. Ф. Ормонт, *Структуры неорганических
веществ*, 1948.

А. К. АРЕН, О. Я. НЕЙЛАНД и академик АН ЛатвССР Г. Я. ВАНАГ

О СТРУКТУРЕ 2-*n*-НИТРОФЕНИЛИНДАНДИОНА-1,3

Изучая аминопроизводные 2-арилиндандионов-1,3, мы включили в наш круг исследований и 2-*n*-нитрофенилиндандион-1,3 (НФИ) (I). Он интересен тем, что, в отличие от бесцветного 2-фенилиндандиона-1,3, представляет собой темно-красное вещество. 2-Хлор- и 2-бром-НФИ бесцветны; бесцветен также бис-*n*-нитрофенилиндандион-1,3, а 2-аминопроизводные НФИ—желтые или оранжевые вещества, подобно аминопроизводным 2-фенил- и 2-анизилиндандиона-1,3 (¹⁻⁴).

Интересно выяснить, чем вызвана окраска НФИ. Объяснить это явление только тем эмпирическим фактом, что введение нитрогруппы углубляет окраску многих соединений, было бы ошибочно, ибо известно, что даже 4-динитрофенилиндандион-1,3 совершенно лишен окраски (⁵). В литературе отмечено (^{6,7}), что фенилиндандионы, имеющие электрофильный заместитель (Cl, Br, J) в *n*-положении фенильного радикала, показывают явление полихромии. В зависимости от характера растворителя, из которого эти соединения получаются, они обладают различной окраской: из полярных растворителей они кристаллизуются в виде красных веществ, из неполярных — бесцветных. Эти соединения показывают и явление термохромии. При определении точек плавления красные формы переходят в бесцветные. Имеются указания (⁷), что красная форма НФИ стабильна

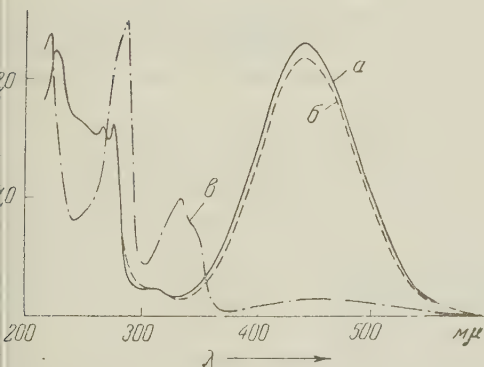


Рис. 1. У.-ф. спектры поглощения в абс. метаноле: а — НФИ, б — Na-соль НФИ; в — Na-соль 2-фенилиндандиона

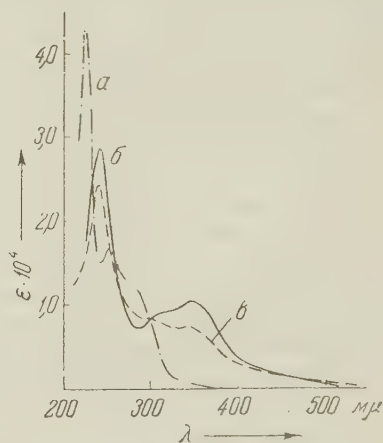
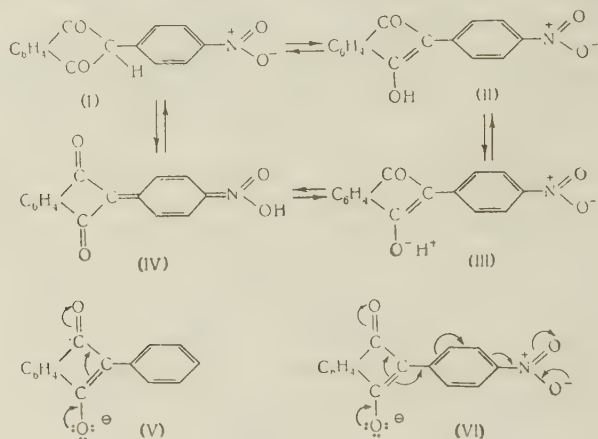


Рис. 2. У.-ф. спектры поглощения: а — НФИ в дихлорэтаноле, б — метилловый эфир НФИ в дихлорэтаноле; в — метилловый эфир НФИ в абс. метаноле

не меняется под влиянием температуры и растворителя. Изменение окраски фенилиндандионов в полярных растворителях некоторые авторы объясняют сдвигом равновесия кето-энольного таутомерного равновесия в сторону образования энольной формы (II) (⁷). По-видимому, повышенная температура

и малополярные растворители благоприятствуют противоположному процессу — образованию дикетоформы (I). Но нельзя не учесть возможности существования НФИ и в валентных структурах (III) и (IV). Для решения этого вопроса мы подвергли НФИ и некоторые доступные нам его производные спектроскопическому исследованию в ультрафиолетовой и инфракрасной областях. Исследован также метиловый эфир его энольной формы, полученный действием эфирного раствора диазومتана на НФИ (оранжевое вещество, т. пл. 190—192°. Найдено %: N 5,24. $C_{16}H_{11}O_4N$. Вычислено %: N 4,98).

У.-ф. спектры поглощения НФИ и его Na-соли в растворе абс. метанола характеризуются идентичными кривыми поглощения (рис. 1). Видно, электронная структура НФИ в растворе одинакова с электронной структурой его аниона. Следовательно, НФИ в растворе абс. метанола диссоциирован. Сравнение у.-ф. спектров структурально близких Na-солей



2-фенилиндандиона-1,3 и НФИ показывает, что характер поглощения этих энولاتионов отличается. Это вполне понятно, ибо выравнивание электронной плотности в энولاتионе 2-фенилиндандиона-1,3 протекает главным образом в сторону карбонильной группы (V).

В случае энولاتиона (VI), благодаря наличию системы сопряженных связей, выравнивание электронной плотности протекает и в сторону нитрогруппы. Удлинение системы сопряженных связей влечет за собой интенсивное поглощение при 440 мμ ($\epsilon = 22200$).

У.-ф. спектр НФИ в дихлорэтано дает кривую поглощения, характерную для дикетоформы (рис. 2), и характеризуется $\lambda_{\text{макс}}$ при 229 мμ и ϵ соответственно 43000. Данные и.-к. спектра насыщенного раствора НФИ в дихлорэтано согласуются с данными у.-ф. спектров и характеризуются двумя частотами карбонильных групп при 1717 и 1750 см^{-1} . У 2-бром-2-анилино- и 2-пиперидинопроизводных НФИ, в которых дикетоформа зафиксирована, поглощение карбонильных групп наблюдается соответственно при 1718 и 1750 см^{-1} , 1707 и 1747 см^{-1} , 1705 и 1742 см^{-1} .

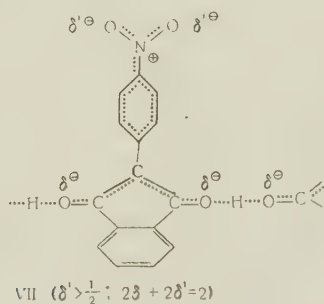
При этом необходимо отметить, что 0,0001 M растворы НФИ в дихлорэтано совершенно бесцветны. Если взвесь красного НФИ в хлороформе или дихлорэтано в закрытом сосуде оставить при комнатной температуре то при продолжительном стоянии постепенно наблюдается превращение красной формы в кристаллическую бесцветную форму, которая несомненно является дикетоформой. В процессе выделения из раствора она превращается обратно в красную форму. Этими данными опровергается имеющийся в литературе взгляд о существовании НФИ только в красной форме, которая взаимно непревратима в белую (?). Очевидно, НФИ ничем не отличается от других замещенных в *n*-положении электрофильными заместителями

елями 2-фенилиндандионов-1,3. Красная форма здесь только более устойчива.

У.-ф. спектр метилового эфира энольной формы НФИ в абс. метаноле существенно отличается от спектра самого НФИ. В растворе дихлорэтана для энольного эфира наблюдается $\lambda_{\text{макс}} = 245$ мμ ($\epsilon = 29000$). Для энольного эфира в метанольном растворе наблюдается небольшое перемещение К-полосы в сторону более низких волн ($\lambda_{\text{макс}} = 242$ мμ; $\epsilon = 24000$). И.-к. спектр метилового эфира энольной формы в 0,01 М растворе дихлорэтана подтверждает правильность его энольно-эфирного строения, ибо наблюдаются поглощения СО-группы при 1700 см^{-1} , двойной связи в 5-членном цикле при 1622 см^{-1} и ν_{NO_2} (асим.) при 1522 см^{-1} . Повышенные значения $\nu_{\text{C=O}}$ могут быть объяснены влиянием напряжения 5-членного цикла, обычно несколько повышающего колебания СО-группы (⁹).

И.-к. спектр поглощения для взвешенного в парафиновом масле красного НФИ, перекристаллизованного из ледяной уксусной кислоты, отрицает его существование в виде дикетоформы (I), ибо не наблюдается поглощения СО-групп. Если образец перекристаллизовать из воды, то наряду с другими колебаниями появляются частоты СО-групп при 1700 и 1735 см^{-1} средней интенсивности. Считаем, что частичное превращение в дикетоформу происходит под влиянием растворителя, так как оба образца при высушивании находились в одинаковых условиях ($\sim 140^\circ$, 2 часа). И.-к. спектроскопические данные также не дают нам основания считать, что красная форма твердого НФИ является энолом (II). Установить поглощение энольного гидроксила нам не удалось. В спектре мало общего со спектром его энольного эфира. Полученные данные заставляют нас отрицать и структуру икетонитроновой кислоты (IV), ибо не наблюдается характерного для β -непредельной дикетогруппировки поглощения. Спектр красного НФИ проявляет большое сходство со спектром его Na-соли. Общая картина спектра в области двойных связей при этом так усложнилась, что однозначно трудно говорить о характерных частотах отдельных групп. Очень интенсивный широкий максимум поглощения при $1514\text{--}1529 \text{ см}^{-1}$, который характерен для энولاتиона 2-фенилиндандиона, в спектре не наблюдается, хотя в районе 1510 см^{-1} поглощение отмечено. Вещество интенсивно поглощает в области $1340\text{--}1350 \text{ см}^{-1}$ и $1560\text{--}1570 \text{ см}^{-1}$.

И.-к. спектроскопические данные таким образом показывают, что НФИ в твердом виде, вероятно, существует в виде ионизированной формы с выравненной электронной структурой. В таких системах, как это отмечено в литературе (⁸) при изучении таутомерии ацетилаcetона, трудно говорить о характерных групповых частотах.



Предполагаем, что протон в нашем случае в кристаллической решетке НФИ удерживается в электронном поле карбонильных групп двух соседних молекул (VII), причем в основном выравнивание электронной плотности протекает в сторону карбонильных групп. Аналогично в случае дихинолил-2)-метана предполагают, что подвижный протон крепко удерживается в поле свободных электронных пар обоих атомов азота одной молекулы (¹⁰).

Таким образом, исследования НФИ показывают, что он представляет собой весьма подвижную систему, которая в полярных растворителях и, вероятно, также в твердом виде существует в виде аниона с выравненной электронной структурой и способна взаимно превращаться. В малополярных растворителях он существует в виде бесцветной дикетоформы. Анион НФИ обладает двойственной реакционной способностью: так с диазومتаном он дает метиловый эфир энольной формы, а с бромом и хлором 2-хлор- и 2-бромпроизводные.

Считаем, что и другие, до сих пор известные 2-арилиндандионы-1,3 с электрофильными заместителями в *n*-положении фенильного радикала в красной форме обладают свойствами и структурными особенностями НФИ.

У.-ф. спектры снимали А. Гринвальде и М. Тилтиньш, за что выражаем им благодарность.

Рижский политехнический институт

Поступило
30 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Я. Ванаг, А. К. Арен, ЖОХ, 27, 1358 (1957). ² Г. Я. Ванаг, А. К. Арен, Уч. зап. Латв. гос. унив., 14, 41 (1957). ³ А. К. Арен, Г. Я. Ванаг, ДАН, 129, 98 (1959). ⁴ А. К. Арен, Г. Я. Ванаг, Уч. зап. Рижского политехнич. инст., 2, 23 (1959). ⁵ А. Е. Порай-Кошиц, И. И. Чижевская, ЖОХ, 26, 842 (1956). ⁶ H. G. Kreu, Die Pharmazie, 13, 619 (1958). ⁷ Z. Eckstein, E. Grochowski, T. Urbanski, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, 7, № 5, 289 (1959). ⁸ R. Mecke, E. Funck, Zs. Elektrochem., 60, № 9, 10, 1124 (1956). ⁹ О. Я. Нейланд, Г. Я. Ванаг, Усп. хим., 28, 436 (1959). ¹⁰ G. Scheibe, W. Riess, Ber., 92, 2189 (1959).

О. Н. КАЧИНСКАЯ, С. Х. ТОГОЕВА, А. П. МЕЩЕРЯКОВ и С. М. СКУРАТОВ

ТЕПЛОТЫ СГОРАНИЯ 1,1-ДИМЕТИЛ-2-АЛКИЛЦИКЛОПРОПАНОВ

(Представлено академиком А. Н. Несмеяновым 22 XII 1959)

Наличие точных экспериментальных данных по теплотам сгорания некоторых алкилциклогексанов и алкилциклопентанов позволило с достаточно высокой точностью рассчитать теплоты сгорания и образования алкилциклопропанов соответствующих гомологических рядов, содержащих нормальные, так и разветвленные боковые цепи (^{1,2}). Для циклопропанов и алкилциклопропанов таких расчетов до последнего времени нельзя было произвести, так как точные экспериментальные данные по теплотам сгорания этих соединений практически отсутствовали. Надежное значение имеется лишь для теплоты сгорания газообразного циклопропана (³). Остальные данные относятся к жидким соединениям и являются мало надежными (⁴⁻⁶). Между тем, термохимические данные по алкилциклопропановым углеводородам имеют большой теоретический и практический интерес.

В настоящей работе сообщаются результаты определения теплот сгорания трех 1,1-диметил-2-алкилциклопропанов в жидкой фазе и даются формулы для расчета теплот сгорания всех соединений этого гомологического ряда. Примененная методика определения теплот сгорания подробно описана ранее (⁷). Применялся калориметр с изотермической оболочкой. Испытуемые в тонкостенные стеклянные ампулы жидкие вещества сжигались в калориметрической бомбе, в избытке кислорода при начальной температуре опыта 25°. Для измерения температуры использовался ртутный термометр; отсчеты температуры производились с точностью $3 \cdot 10^{-4}$ °. Теплоты сгорания определялись по бензойной кислоте, теплота сгорания которой принята равной 6322,8 кал/г (вес в воздухе) при 25° (1 кал = 4,1840 абс. дж.). Для зажигания вещества использовалась железная проволока. Теплоты образования Fe_2O_3 и раствора азотной кислоты в бомбе приняты равными 1793 кал/г и 13,80 ккал/моль соответственно. Масса вещества, как правило, определялась по разности веса пустой и полной ампулы с точностью до $2 \cdot 10^{-5}$ г и составляла от 0,2 до 0,3 г. В случае низкокипящего 1,1-диметил-2-этилциклопропана вес сгоревшего вещества находился по результатам анализа продуктов сгорания на CO_2 . Вещества синтезировались и очищались по ранее описанному способу (⁸). Спектры комбинационного рассеяния показали отсутствие в препаратах примесей алкенов.

1,1-Диметил-2-этилциклопропан, C_7H_{14} (мол. вес 98,189). Препарат очищался трехкратной и четырехкратной перегонкой над металлическим натрием. После последней перегонки константы вещества остались неизменными: т. кип. 78,75°/746; d_4^{20} 0,7105; n_D^{20} 1,3960; результаты микроанализа (в %): С 85,95; Н 14,12. (Теоретически для всех соединений: С 85,63; Н 14,37.)

1,1-Диметил-2-пропилциклопропан, C_8H_{16} (мол. вес 112,216). Препарат после пятикратной и шестикратной перегонки над металлическим натрием имел следующие константы: т. кип. 105,5°; d_4^{20} 0,7297; n_D^{20} 1,4060. В результате микроанализа найдено (в %): С 85,96; Н 14,17.

1,1-Диметил-2-*n*-гексилциклопропан, $C_{11}H_{22}$ (мол. вес 154,297). После четвертой и пятой перегонки константы вещества были следующими: т. кип. $176,5^\circ/736$, d_4^{20} 0,7612; n_D^{20} 1,4240. В результате микроанализа найдено (в %): С 85,74; Н 14,32.

Таблица 1

Теплоты сгорания 1,1-диметил-2-*n*-алкилциклопропанов, $-\Delta H_c^0$, при 25° и 1 ат. в ккал/моль

1,1-диметил-2-этилциклопропан	1,1-диметил-2-пропилциклопропан	1,1-диметил-2-гексилциклопропан *
Трехкратная перегонка	Пятикратная перегонка	Четырехкратная перегонка
1115,5	1271,2	1740,3
1115,2	1271,2	1739,9
1115,0	1272,6	1739,4
1114,6	1270,8	1740,0
1114,7	1270,4	
Четырехкратная перегонка	Шестикратная перегонка	Пятикратная перегонка
1115,1	1271,2	1739,7
1115,0	1271,1	1741,4
1114,9	1271,1	1739,7
		1739,9
$1115,0 \pm 0,2^{**}$ ($\pm 0,02\%$)	$1271,2 \pm 0,4$ ($\pm 0,03\%$)	$1739,9 \pm 0,4$ ($\pm 0,03\%$)

* В табл. 1 приводятся девять опытов из девятнадцати, так как в остальных была обнаружена неполнота сгорания.

** Во всех данных, приведенных в этой работе, погрешность указана как среднее отклонение от среднего арифметического.

вид:

$$\Delta H_{C_nH_{2n}} = c' + \sum n_{ij} A_{ij} = I_{2'3'} + I_{2'4'} + I_{3'4'} + 2y_{14'} + y_{23'} + (n-7) A_{22} + A_{21}, \quad (2)$$

где I_{ij} — коэффициенты, относящиеся к связям в цикле, и y_{ij} — к связям цикл — боковая цепь (в сумме составляющие c'). Остальные члены относятся к связям в замещающем *n*-алкиле и включаются в сумму $\sum n_{ij} A_{ij}$. Для расчета I_{ij} и y_{ij} экспериментальных данных пока недостаточно, но A_{22} и c' могут быть рассчитаны по данным, полученным в настоящей работе. Значение A_{22} , найденное нами из теплот сгорания 1,1-диметил-2-этил- и 1,1-диметил-2-*n*-гексилциклопропана, $A_{22} = \frac{1}{4}(1739,9 - 1115,0) = 156,2_3$ ккал/моль, совпадает с литературным значением 156,231 ккал/моль, найденным для алканов, алкилциклопентанов и алкилциклогексанов (1). Такое же совпадение коэффициента A_{22} для соединений этого ряда получено при расчете по той же схеме и других физико-химических свойств, таких как теплота образования ($-\Delta H_f^0$), молекулярная рефракция (R_m) и молярный объем (V_m). В табл. 2 даны примеры такого совпадения.

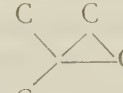
По данным теплот сгорания 1,1-диметил-2-этил- и 1,1-диметил-2-гексилциклопропана и найденному значению A_{22} были рассчитаны теплоты сгорания 1,1-диметил-2-пропил-, 1,1-диметил-2-*n*-бутил- и 1,1-ди-

В табл. 1 приводятся данные по определению теплот сгорания трех перечисленных соединений после двух последних перегонки. Из приведенных данных видно, что для всех трех веществ теплота сгорания, после последней перегонки, в пределах точности определений не изменилась.

Используя аддитивный метод и представления о типах и подтипах связей, развитые В. М. Татевским (1,2), общую формулу расчета теплот сгорания 1,1-диметил-2-алкилциклопропанов можно представить в следующем виде:

$$-\Delta H_{C_nH_{2n}} = c' + \sum n_{ij} A_{ij}, \quad (1)$$

где c' — инкремент теплоты сгорания, приходящийся на сумму связей в

группе  $\sum n_{ij} A_{ij}$ — от-

носится к связям в замещающем алкильном радикале, нормальном или разветвленном. Для 1,1-диметил-2-*n*-алкилциклопропанов (алкил — любой радикал, начиная с этила, т. е. при $n \geq 7$) уравнение (1) принимает

метил-2-*n*-амилциклопропана. Теплоты сгорания перечисленных соединений ($-\Delta H_c^0$) и их теплоты образования ($-\Delta H_f^0$) приводятся в табл. 3. Для расчета $-\Delta H_f^0$ использованы значения $-\Delta H_f^0 \text{CO}_2(\text{г}) = 94,052$ ккал/моль и $-\Delta H_f^0 \text{H}_2\text{O}(\text{ж}) = 68,317$ ккал/моль.

Как видно из приведенных данных, рассчитанное и экспериментальное значения для теплоты сгорания 1,1-диметил-2-пропилциклопропана оказались совпадающими.

Таблица 2

коэффициент	$-\Delta H_c^0$		$-\Delta H_f^0$		R_M		V_M	
	эксп.	лит.	эксп.	лит.	эксп.	лит.	эксп.	лит.
A_{22}	156,23	156,231	6,13	6,138	4,64	4,643	16,27	15,96
c'	851,74	—	6,96	—	25,19	—	96,86	—

Таблица 3

Теплоты сгорания и теплоты образования 1,1-диметил-2-*n*-алкилциклопропанов при 25 °С и 1 ат. в ккал/моль

	Соединение	$-\Delta H_c^0$ эксп	$-\Delta H_c^0$ расч	$-\Delta H_f^0$
1	1,1-Диметил-2-этилциклопропан C_7H_{14}	1115,0	—	21,6
2	1,1-Диметил-2-пропилциклопропан C_8H_{16}	1271,2	1271,2	27,8
3	1,1-Диметил-2-бутилциклопропан C_9H_{18}	—	1427,4	33,9
4	1,1-Диметил-2-амилциклопропан $\text{C}_{10}\text{H}_{20}$	—	1583,6	40,0
5	1,1-Диметил-2-гексилциклопропан $\text{C}_{11}\text{H}_{22}$	1739,9	—	46,2

Известно, что наличие в молекуле циклопарафинов мало напряженного пятичленного и шестичленного кольца практически не влияет на рассматриваемые свойства боковой цепи (1). Для случая напряженных трех- и четырехчленных циклов этот вопрос до настоящего времени оставался неосвещенным. Из полученных нами данных следует, что наличие циклопропанового кольца не сказывается на характере связей в замещающем алкиле, начиная уже с этила. Этот вывод, по-видимому, можно распространить и на алкилциклобутановые соединения. Таким образом, теплоты сгорания соединений ряда 1,1-диметил-2-*n*-алкилциклопропанов (*n*-алкилэтил и другие высшие заместители) могут быть рассчитаны по уравнению (3)

$$-\Delta H_c^0 = 1115,0 + (n - 7) 156,23, \quad (3)$$

где $n \geq 7$ — число углеродных атомов в молекуле.

Аналогичным образом можно рассчитать теплоты образования по уравнению (4):

$$-\Delta H_f^0 = 21,6 + (n - 7) 6,13. \quad (4)$$

Из теплот сгорания 1,1-диметил-2-этил-, 1,1-диметил-2-*n*-пропил- и 1,1-диметил-2-*n*-гексилциклопропанов и литературных значений для A_{22} (156,231 ккал/моль) и A_{21} (263,238 ккал/моль) нами рассчитан входящий в уравнения (1) и (2) инкремент c' . Последний оказался равным $c = 851,74$ ккал/моль. Значения c' , рассчитанные для $-\Delta H_f$, R_M и V_M , приведены в табл. 2. Теперь оказалось возможным рассчитать теплоты сгора-

ния не только нормальных, но и разветвленных * 1,1-диметил-2-алкилциклопропанов. Уравнение (1) в этом случае принимает вид:

$$-\Delta H_c = 851,7 + \sum n_{ij}A_{ij} \text{ при } n \geq 7. \quad (5)$$

Значения коэффициентов A_{ij} для связей С — С различных подтипов в разветвленных алканах могут быть взяты из литературных данных (1).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. М. Татевский, Химическое строение углеводородов и закономерности в их физико-химических свойствах, М., 1953, стр. 159 и 226. ² В. М. Татевский, ДАН, 113, № 4, 836 (1957). ³ J. W. Knowlton, F. D. Rossini, J. Res. Nat. Bur. Standards, 43, № 2, 113 (1949). ⁴ Р. Д. Оболенцев, Физические константы углеводородов, жидких топлив и масел, М.—Л., 1953. ⁵ V. A. Slabey, P. H. Wise, Natl. Advisory. Comm. Aeronaut. Techn. Note, № 2258, 17 (1951); № 2398, 22 (1951). ⁶ V. A. Slabey, P. H. Wise, J. Am. Chem. Soc., 74, 3887 (1952). ⁷ С. М. Скуратов, А. А. Стрепихеев, О. Н. Качинская и др., Уч. зап. Московск. унив., в. 164, 73 (1953). ⁸ А. П. Мещеряков, Л. В. Петрова, Ю. П. Егоров, ЖОХ, 28, в. 9, 2588 (1958).

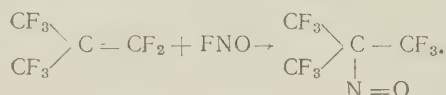
* При разветвлении в алкильном радикале, начиная со второго углеродного атома.

академик И. Л. КНУНЯНЦ, Э. Г. БЫХОВСКАЯ, В. Н. ФРОСИН и Я. М. КИСЕЛЬ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФТОРОЛЕФИНОВ С ФТОРИСТЫМ НИТРОЗИЛОМ

Фтористый нитрозил впервые был получен Руффом в 1905 г. ⁽¹⁾. Однако до сих пор изучены лишь его физические свойства ⁽²⁾ и реакции с некоторыми неорганическими веществами (бор, кремний, красный фосфор, BF_3 , H_2SO_4 и др. ^(1,3)) и бензолом ⁽⁴⁾.

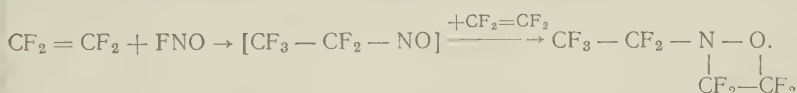
Нами показано, что фтористый нитрозил легко реагирует с фторолефинами, присоединяясь по месту двойной $\text{C}=\text{C}$ связи *. Так, при взаимодействии фтористого нитрозила с φ -изобутиленом с количественным выходом образуется трет.- φ -нитрозоизобутан (т. кип. $+24^\circ$)



с φ -пропилена и FNO получен 2-нитрозо- φ -пропан (т. кип. -13°)

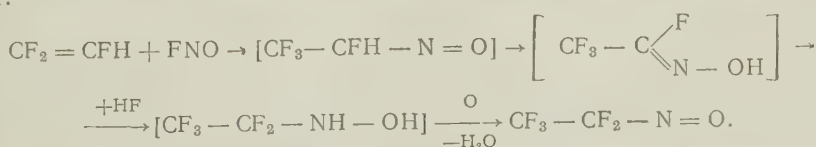


φ -Этилен также реагирует с фтористым нитрозилем, но выделить нитрозоэтан не удалось, так как последний в условиях реакции взаимодействует с избыточным φ -этиленом, давая перфтор-2-этил-1,2-оксатидин, который и является основным продуктом реакции



Образование оксазетидинов наблюдалось Хасцельдином при взаимодействии трифторнитрозометана с тетрафторэтиленом ⁽⁵⁾ и другими фторолефинами.

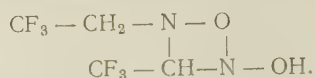
Реакция между фтористым нитрозилем и трифторэтиленом неожиданно привела к получению φ -нитрозоэтана, синего газа с т. кип. -42 — -43°). Его образование можно объяснить следующим рядом превращений:



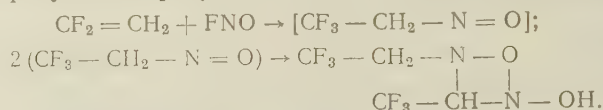
Еще более сложно реагируют фтористый нитрозил и фтористый винилден. Единственным продуктом этой реакции явилось соединение

* Фтористый нитрозил получался реакцией между газообразными фтором и окисью га.

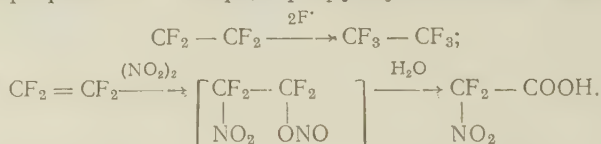
с т. кип. $^{\circ}80$ и брутто-формулой $(C_2F_3H_2ON)_x$. Исследование свойств полученного соединения позволило приписать ему следующее строение:



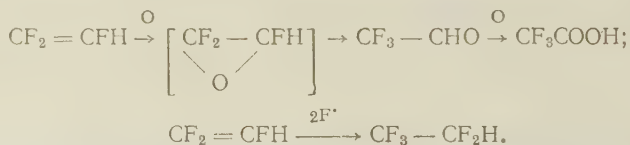
Вероятно, оно образуется в результате следующих превращений:



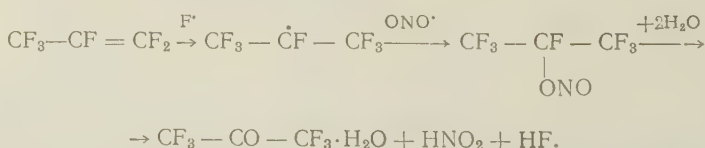
Основная реакция между фтористым нитрозилем и фторолефинами, состоящая в присоединении FNO к фторолефинам по месту двойной связи, часто сопровождается побочными реакциями окисления, фторирования и нитрования исходных фторолефинов фтористым нитрозилем и окислами азота; последние образуются в результате разложения FNO. Так, в реакции между фтористым нитрозилем и тетрафторэтиленом наблюдалось образование гексафторэтана и нитродифторуксусной кислоты:



В результате взаимодействия фтористого нитрида с трифторэтиленом кроме φ -нитрозоэтана были выделены трифторацетальдегид, трифторуксусная кислота и пентафторэтан:



В реакции между фтористым нитрозилем и φ -пропиленом наряду с φ -нитрозопропаном получен нитрит гексафторпропанола-2, который гидролизом был переведен в гексафторацетон:



Реакционная способность фторолефинов по отношению к FNO различна. В то время как исследованные нами гидрофторолефины $CF_2 = CFH$ и $CF_2 = CH_2$ реагируют с фтористым нитрозилем со взрывом и для успешной реакции необходимо разбавление реагентов инертным растворителем, перфторолефины реагируют с фтористым нитрозилем в более жестких условиях. Так, φ -изобутилен взаимодействует с FNO при комнатной температуре без растворителя. С тетрафторэтиленом и φ -пропиленом фтористый нитрозил реагирует уже только при нагревании и в присутствии катализатора (активированный уголь). В отсутствие катализатора образуются только продукты нитрования (и фторирования) φ -олефинов.

Экспериментальная часть

φ -И з о б у т и л е н и FNO. В стальную герметически закрывающуюся пробирку загружалось 35 мл перфторизобутилена, 10 мл нитро-

дифторида и 1 г прокаленного фтористого калия. Пробирка встряхивалась на «трясучке» при комнатной температуре 24 часа. После вскрытия пробирки отгонялись непрореагировавшие исходные. В остатке — темносиняя жидкость с т. кип. $24^{\circ}/760$ мм, d_4^0 1,6630. Найденный мол. вес 199, вычислен для C_4F_9NO 249.

Найдено %: C 19,40; N 5,28; F 69,21
Вычислено %: C 19,28; N 5,62; F 68,67

φ-Пропилен и FNO. А. В стальную пробирку загружалось 2 г активированного угля, импрегнированного серноокислым кальцием, 25 мл перфторпропилена и 10 мл нитрозилфторида. Пробирка нагревалась при $140-150^{\circ}$ в течение 7 час. При разгонке реакционной массы получены следующие соединения:

1) Перфторнитрозопропан — синий газ с т. кип. -13° . Найденный мол. вес 197, вычисленный для C_3F_7NO 199.

Найдено %: N 6,66; F 67,06
Вычислено %: N 7,03; F 66,83

2) Нитрит перфторпропанола-2 — желтая жидкость с т. кип. $+25^{\circ}/749$ мм. При выливании в воду разлагается с выделением окислов азота. Вода экстрагировалась эфиром; после отгонки эфира в остатке гидрат перфторацетона. Бесцветная жидкость с т. кип. $50^{\circ}/90$ мм; d_4^{20} 1,3950; n_D^{20} 1,3252. Литературные данные (⁷): т. кип. $57^{\circ}/93$ мм; d_4^{20} 1,4085; n_D^{20} 1,3288. Полученное соединение дает семикарбазон с т. пл. 153° . Литературные данные (⁷): т. пл. 153° .

Найдено %: C 19,48; H 2,20; N 16,81
 $C_4H_5F_6N_3O_2$. Вычислено %: C 19,91; H 2,04; N 17,12

Б. В стальную пробирку загружалось 25 мл перфторпропилена и 10 мл нитрозилфторида. Пробирка нагревалась 7 час. при $100-110^{\circ}$. После отгонки непрореагировавших исходных реакционная масса выливалась в ледяную воду, при этом часть продукта разлагалась с выделением окислов азота, и оставалась тяжелая синяя жидкость. Водный раствор экстрагировался эфиром. После отгонки эфира получена α-нитроперфторпропионовая кислота. Бесцветная жидкость, т. кип. $56^{\circ}/35$ мм, d_4^{20} 1,4866; n_D^{20} 1,3578. Литературные данные (⁸): т. кип. 119° ; d_4^{20} 1,638; n_D^{20} 1,3560. Мол. вес, найденный титрованием щелочью, 194; вычисленный для $C_3HF_4NO_4$ 191. Синяя жидкость — нитронитрозопропан; т. кип. $13-54^{\circ}$; d_4^{20} 1,6507. Мол. вес: найденный 227, вычисленный для $C_3F_6N_2O_3$ 226.

Найдено %: C 16,02; N 12,00; F 50,50
Вычислено %: C 15,92; N 12,39; F 50,44

φ-Этилен и FNO. В стальную пробирку загружалось 2 г активированного угля, импрегнированного серноокислым кальцием, 20 мл тетрафторэтилена и 10 мл нитрозилфторида. Пробирка нагревалась в течение 10 час. при $70-80^{\circ}$. После охлаждения и вскрытия пробирки отгонялись газообразные продукты реакции, а остаток выливался в ледяную воду; выпавшее масло отделялось, сушилось серноокислым натрием, перегонялось. Перфтор-2-этил-1,2-оксазетидин — бесцветная жидкость, т. кип. $24^{\circ}/737$ мм; d_4^0 1,634; $n_D^0 < 1,3$. Найденный мол. вес (методом Майера) 252, вычисленный для C_4F_9NO 249.

Найдено %: C 19,65; N 5,75; F 68,35
Вычислено %: C 19,28; N 6,62; F 68,67

Промывную воду проэкстрагировали эфиром; после отгонки эфира получена нитродифторуксусная кислота — бесцветная жидкость с

т. кип. $70^{\circ}/25$ мм; d_4^{20} 1,4358; n_D^{20} 1,3660. Литературные данные ⁽⁸⁾: т. кип. $72^{\circ}/25$ мм; d_4^{20} 1,4381; n_D^{20} 1,3670. В газообразных продуктах реакции найден гексафторэтан — газ с т. кип. — 79° , т. замерз. — 101° . Литературные данные ⁽⁹⁾: т. кип. — 79° , т. замерз. — $100,6^{\circ}$; F найдено 81,72%, F вычислено 82,61%; мол. вес найденный 137, вычисленный 138.

Трифторэтилен и FNO. В стальную пробирку вносилось 10 мл трифторэтилена, 5 мл нитрозилфторида и 20 мл φ -циклобутана. Пробирка оставлялась на двое суток при комнатной температуре. После вскрытия пробирки газообразные продукты конденсировались и фракционировались на колонке Подбильняка. В результате кроме φ -циклобутана найдены: 1) пентафторэтан — бесцветный газ с т. кип. — 48° — 50° и т. пл. — 103° . Литературные данные ⁽¹⁰⁾: т. кип. — $48,5^{\circ}$; т. пл. — 102° ; 2) перфторнитрозоэтан — синий газ, с т. кип. — 42° — 43° . Мол. вес найденный 144, вычисленный для C_2F_5NO 149° .

Найдено %: C 15,34; N 9,06; F 62,74
Вычислено %: C 16,10; N 9,39; F 63,75

Жидкий продукт реакции (собранный из 7 пробирок) разгонялся на ректификационной колонке. В результате разгонки выделены следующие продукты:

1) Трифторуксусная кислота — бесцветная жидкость, т. кип. 72° , d_4^{20} 1,542; $n_D < 1,3$. Литературные данные ⁽¹¹⁾: d_4^{15} 1,535; $n_D < 1,3$.

Найдено %: F 49,44
Вычислено %: F 50,00

2) Трифторацетальдегид (собран в «ловушке»). Бесцветный газ, т. кип. — 21° . Литературные данные ⁽¹²⁾ — 21° . Мол. вес: найденный 98, вычисленный для C_2F_3NO 98; легко полимеризуется в красивые белые кристаллы. При пропускании газа в раствор 2,4-динитрофенилгидразина выпадает кристаллический гидразон, т. пл. которого после перекристаллизации из 50% спирта 150 — 151° . Литературные данные ⁽¹²⁾ 150 — 151° .

Найдено %: N 19,70
 $C_8H_5F_3N_4O_4$. Вычислено % N 20,15

Фтористый винилиден и FNO. В стальную пробирку вносилось 10 мл винилиденфторида, 8 мл фтористого нитрозила и 25 мл фреона-22. Пробирка оставлялась на двое суток при комнатной температуре. Остаток после вскрытия пробирки и отгонки растворителя и непрореагировавших исходных перегонялся — бесцветная легкоподвижная жидкость, нерастворимая в воде и в водных растворах щелочей. После сплавления с сухим КОН дает качественную реакцию на азотистую кислоту. Т. кип. 79 — 80° ; d_4^{21} 1,6160; n_D^{21} 1,3437. Мол. вес: найденный 217, вычисленный для $C_4H_4F_4N_2O_2$ 226. В соединении найден один подвижный водородный атом.

Найдено %: C 21,52; H 1,85; N 12,75; F 50,73
Вычислено %: C 21,24; H 1,89; N 12,39; F 50,44

Поступило
30 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ O. Ruff, K. Stauber, Zs. anorg. u. allgem. Chem., **47**, 190 (1905). ² C. U. Stephenson, E. A. Jones, J. Chem. Phys., **20**, 135 (1952); D. W. Magnuson, J. Chem. Phys., **19**, 1071 (1951). ³ A. A. Wolff, J. Chem. Soc., **1950**, 1053. ⁴ O. Ruff, K. Stauber, W. Neuman, Zs. anorg. u. allgem. Chem., **208**, 293 (1932). ⁵ R. N. Haszeldine, D. A. Barr, J. Chem. Soc., **1955**, 1881. ⁶ И. Л. Кнунянц, А. В. Фокин, ДАН, **112**, 67 (1957). ⁷ A. L. Henne, J. W. Separd, E. J. Joung, J. Am. Chem. Soc., **72**, 3577 (1950). ⁸ И. Л. Кнунянц, А. В. Фокин, ДАН, **111**, 1035 (1956). ⁹ B. Atkinson, A. B. Trenwith, J. Chem. Soc., **1953**, 2083. ¹⁰ W. S. Joung, N. Fukuhara, L. A. Bigelow, J. Am. Chem. Soc., **62**, 1171 (1940). ¹¹ F. Swarts, Bull. Classe sci. Acad. roy. Belg., **8**, 342 (1922). ¹² A. L. Henne, R. L. Pelley, R. M. Alm, J. Am. Chem. Soc., **72**, 3370 (1950).

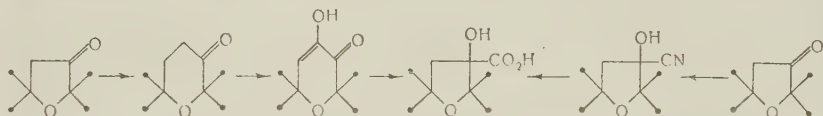
И. К. КОРОБИЦЫНА и К. К. ПИВНИЦКИЙ

НОВЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА 2,2,6,6-ТЕТРААЛКИЛТЕТРАГИДРОПИРАНДИОНОВ-3,5

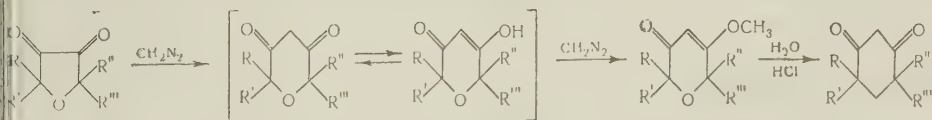
(Представлено академиком А. Н. Несмеяновым 4 I 1960)

В настоящей работе приводятся результаты исследования реакции диазометана с монокетонами и α -дикетонами ряда фуранидина.

Мы установили, что при действии диазометана на 2,2,5,5-тетраметилфуранидон-3 получается 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирон-3 и следы 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирона-4; лучшие результаты получаются при проведении реакции по методу *in situ* с применением N-нитрозо-N-метилуретана или N-нитрозо-N-метилуретилана, где выход основного продукта реакции достигает 55—58%. Доказательством структуры 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирона-3, представителя почти неизвестного ранее класса тетрагидро- β -пиранов, служило окисление его двуокисью селена в Δ^4 -2,2,6,6-тетраметилдигидропирон-3-ол-4, бензильная перегруппировка которого привела к 3-окси-2,2,5,5-тетраметилфуранидил-3-карбоновой кислоте, идентичной кислоте, полученной из 2,2,5,5-тетраметилфуранидона-3.



На значительном числе примеров мы показали, что взаимодействие 2,2,5,5-тетраалкилфуранидиндионов-3,4 с эфирным раствором диазометана протекает с расширением цикла между двумя карбонильными группами. Образовавшиеся 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионы-3,5 в условиях реакции энолизируются и метилируются избытком диазометана, вследствие чего в качестве продуктов реакции получают метиловые эфиры 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5,



Эфиры энольной формы легко гидролизуются при нагревании с соляной кислотой, давая 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионы-3,5; эта реакция может служить удобным методом синтеза указанных β -дикетонных тетрагидропиранов.

Полученные нами β -дикетоны ряда тетрагидропирана легко образуют различные производные; так, например, 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирандион-3,5 дает диоксим, семибензилиденное производное метилируется диазометаном, вступает в реакцию азосочетания⁽¹⁾. Восстановлением метилового эфира 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирандиона-3,5 алюмогидридом лития с последующим гидрированием над платиной был получен 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирон-3, идентичный полученному из 2,2,5,5-тетраметилфуранидона-3 и диазометана.

У.ф. спектры поглощения метанольных растворов 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5 и их метиловых эфиров имеют интенсивный максимум поглощения в области 250 мμ (lg ε 4,6), что указывает на значительную энолизацию этих β-дикетонов в метанольных растворах и на отсутствие внутримолекулярной водородной связи. У.ф. спектры поглощения 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5 в 0,01 *N* метанольном растворе NaOH обнаруживают максимум поглощения в области 280 мμ (lg ε 4,6), что говорит о полной энолизации этих дикетонов в метаноле и полной диссоциации в метанольном растворе едкого натра.

Отметим, что во всех случаях, за исключением 2,2,5,5-тетраметилфуранидиндиона-3,4, хорошие выходы метиловых эфиров 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5 получаются лишь при прибавлении в реакционную смесь метанола (10% по объему). Так как в метанольных растворах 2,2,5,5-тетраалкилфуранидиндионы-3,4 существуют в гемикетальной форме ⁽²⁾, то мы считаем, что лишь эта форма фуранидиндионов-3,4 способна реагировать с диазометаном с расширением цикла. Высокий выход метилового эфира 2,2,6,6-тетраметилтетрагидропирандиона-3,5, получаемый и без прибавления метанола, объясняется тем, что исходный фуранидиндион-3,4 весьма гигроскопичен ⁽³⁾ и всегда содержит некоторое количество гидратной формы, построенной аналогично гемикетальной.

Следует отметить, что по данным Б. Эйстера расширение цикла трикетогидриндана под действием диазометана протекает лишь при полном отсутствии воды или спирта ⁽⁴⁾.

Экспериментальная часть

Метиловые эфиры 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5. К 300 мл (0,171 г-мол.) эфирного раствора диазометана при 0° прибавляют 30 мл абс. метанола и за 15 мин. при перемешивании раствор 0,05 г-мол. 2,2,5,5-тетраалкилфуранидиндиона-3,4 в 50 мл абс. эфира и 10 мл абс. метанола. Смесь оставляют на ночь и затем испаряют растворители в вакууме. Остаток растворяют в петролейном эфире, после охлаждения до -70° отделяют осадок. Константы и выходы полученных метиловых эфиров приведены в табл. 1.

Таблица 1

Метиловые эфиры 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандионов-3,5	Выход, %	Т. пл., °C (после возгонки)	С, %		Н, %	
			найд.	выч.	найд.	выч.
2,2,6,6-Тетраметил (C ₁₀ H ₁₆ O ₃)	46	74—75	65,26 65,20	65,19	8,79 8,93	8,75
2,6-Диметил-2,6-диэтил (C ₁₂ H ₂₀ O ₃)	41	69,8—71,3	67,67 67,73	67,89	9,50 9,55	9,50
2,2,6,6-Бис-тетраметилен (C ₁₄ H ₂₀ O ₃)	18,5	46—47	71,15 71,20	71,16	8,65 8,51	8,53
2,2,6,6-Бис-пентаметилен (C ₁₆ H ₂₄ O ₃)	51,5	124,5—126	72,48 72,61	72,69	9,24 9,26	9,15

2,2,6,6-Тетраалкилтетрагидропирандионы-3,5. Суспензию 1 г чистого метилового эфира 2,2,6,6-тетраалкилтетрагидропирандиона-3,5 в 5 мл 19% HCl нагревают при частом встряхивании на водяной бане несколько часов. По охлаждении отделяют дикетон. Если не выделять эфир энольной формы, а подвергать гидролизу сырую реакционную массу, образующуюся при действии диазометана на фуранидиндионы-3,4, то эти β-дикетоны можно получить с более высоким выходом, что видно из данных, приведенных в табл. 2.

Таблица 2

6,6-Тетраалкилтетрагидропирандионы-3,5 (бруттоформула)	Выход из чистого эфира		Выход из сырого эфира на α -динектон, %	Т. пл., °C (после возгонки)	C, %		H, %	
	на эфир, %	на α -динектон, %			найд.	выч.	найд.	выч.
6,6-Тетраметил ($C_9H_{14}O_3$)	92,5	42,5	66	158—158,5	63,31 63,51	63,51	8,42 8,54	8,29
6-Диметил-2,6-диэтил ($C_{11}H_{18}O_3$)	90	37	44	150,8—151,3	66,52 66,39	66,64	9,09 8,99	9,15
6-Диметил-6,6-тетраметил- тилен ($C_{11}H_{16}O_3$)	—	—	40	152,5—153,5	67,41 67,57	67,32	8,34 8,33	8,22
6,6-Бис-тетраметил- тилен ($C_{13}H_{16}O_3$)	96,5	18	38	169—170	70,32 70,17	70,24	8,17 8,23	8,16
6-Диметил-6,6-пентаметил- тилен ($C_{12}H_{18}O_3$)	—	—	41	161,5—162	68,85 68,90	68,54	8,79 8,69	8,63
6,6-Бис-пентаметил- тилен ($C_{15}H_{22}O_3$)	96	49,5	55	193	72,09 72,07	71,97	8,87 8,93	8,86

За повседневное внимание и интерес к нашей работе мы приносим сердечную благодарность проф. Ю. К. Юрьеву.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. К. Коробицына, К. К. Пивницкий, Ю. К. Юрьев, ЖОХ, **29**, (1959). ² C. Sandris, G. Ourisson, Bull. Soc. Chim., **1958**, 338.
И. К. Коробицына, Ю. К. Юрьев, О. И. Нефедова, ЖОХ, **24**, 188 (1954). ⁴ В. Eistert, R. Müller, Ber., **92**, 2071 (1959).

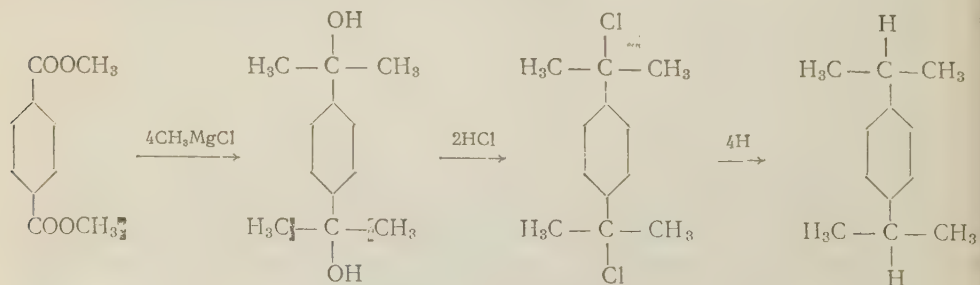
А. Л. ЛИБЕРМАН, Т. В. ВАСИНА и академик Б. А. КАЗАНСКИЙ

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ СТЕРЕОИЗОМЕРНЫХ 1,4-ДИИЗОПРОПИЛЦИКЛОГЕКСАНОВ

В 1956 г. нами было показано ⁽¹⁾, что у стереоизомеров 1,4-диизопропилциклогексана нижекипящий изомер имеет более высокие показатели преломления и удельный вес. Между тем, для всех других известных в то время стереоизомерных 1,4-диалкилцикланов более высокие значения этих констант характеризовали, как раз наоборот, вышекипящие изомеры. Предварительное ⁽¹⁾, а затем и более детальное ⁽²⁾ исследование спектров комбинационного рассеяния стереоизомерных 1,4-диизопропилциклогексанов и сопоставление их со спектрами других цис-транс-1,4-диалкилциклогексанов ⁽³⁾ (в том числе с 1,4-диметилциклогексаном, у которого пространственная конфигурация стереоизомеров доказана достаточно надежно ⁽⁴⁾) показало, что в нашем случае нижекипящий изомер является цис-формой. Таким образом, мы встретились со своеобразным отклонением от правила Ауверса — Скита, утверждающего, что цис-формы двузамещенных цикланов должны кипеть выше транс-форм. Как известно, произошедший за последние годы некоторый пересмотр этого правила коснулся только рядов 1,3-диалкилциклопентанов ⁽⁵⁾ и 1,3-диалкилциклогексанов ⁽⁴⁾ а нарушений правила в ряду 1,4-двузамещенных циклогексанов до нашей работы не отмечалось. Лишь в 1958 г. Илиел и Хабер ⁽⁶⁾ наблюдали нарушение правила, совершенно такое же, как и у 1,4-диизопропилциклогексанов, но на примере кислородных производных: 2-, 3- и 4-метилциклогексанолов.

Ввиду принципиального значения таких фактов нарушения правила Ауверса — Скита, мы считали важным подтвердить его в случае 1,4-диизопропилциклогексанов для большей надежности синтетическим путем в дополнение к доказательствам спектроскопическим, о которых говорилось выше. Решению данной задачи и посвящена настоящая работа.

В качестве исходных веществ мы взяли диметилвые эфиры цис- и транс-гексагидротерефталевых кислот, пространственная конфигурация которых как и самих кислот, не вызывает сомнения ^(7,8). Имелось в виду каждый из стереоизомеров порознь превратить в соответствующую форму 1,4-диизопропилциклогексана по следующей схеме:



Если бы реакции прошли стереоспецифично, сравнение констант изомерных углеводов, полученных по этой схеме и ранее выделенных точной

ректификацией (¹), дало бы окончательный ответ относительно их пространственной конфигурации. Однако осуществить этот синтез пока удалось лишь для транс-формы. В случае же цис-формы все стадии синтеза протекали нестереоспецифично, а соответствующий цис-дихлорид даже вообще не удалось выделить в индивидуальном виде.

Подробное описание синтезов и свойств впервые полученных стереоизомерных диолов, транс-дихлорида и некоторых других веществ будет дано позднее; здесь приводятся лишь краткие сведения. Исходные диметилловые эфиры цис- и транс-циклогексан-1,4-дикарбоновых кислот были получены гидрированием диметилтерефталата, разделением путем вымораживания, а затем тщательной очисткой транс-формы (многократной перекристаллизацией (т. пл. 70,0—70,5°)) и цис-формы — кристаллизацией из эфира при низкой температуре и перегонкой в вакууме на эффективной колонке (т. кип. 126,9—127,2°/7 мм; т. замерз. 9,6°; n_D^{20} 1,4590; d_4^{20} 1,1111).

Любопытно отметить, что при такой разгонке смеси диметилловых эфиров стереоизомерных гексагидротерефталевых кислот чистый эфир цис-кислоты отходит в первых фракциях, тогда как транс-эфир выкристаллизуется из последних фракций, а также содержится в значительном количестве в остатке. Таким образом, в данном случае транс-форма, в нарушение правила Ауверса — Скита, кипит выше цис-формы, подобно тому как это наблюдалось в случае 1,4-диизопропилциклогексана ().

1,4-Бис-(α -оксиизопропил)-циклогексаны получались взаимодействием эфиров стереоизомерных кислот с большим избытком хлористого или бромистого метилмагния (цис-форма: т. пл. 100,5—100,7°; транс-форма: т. пл. 159,3—159,8°). Соответствующие дихлориды готовились насыщением диолов в метанольном растворе сухим хлористым водородом. Транс-изомер был получен в индивидуальном виде (т. пл. 134,3—135,4°), однако из цис-диола образовалась смесь цис- и транс-дихлоридов, не поддававшаяся разделению.

Весьма трудной задачей оказалась замена хлора на водород. Так, при комнатной температуре хлор в транс-1,4-бис-(α -хлоризопропил)-циклогексана не гидрируется водородом ни при атмосферном, ни при повышенном (150 ат.) давлении в присутствии никеля Ренея, платины и палладия, в том числе палладия, отложенного на углекислом кальции, который, по литературным данным (⁹), вызывает элиминирование хлора даже из бензольного ядра. При повышении температуры до 50—70° в присутствии этих катализаторов хлор не элиминируется, а отщепляется в виде HCl с образованием диолефинов, которые затем гидрируются, давая смесь стереоизомеров (n_D^{20} 1,4511). С магнием дихлорид не вступает в реакцию даже в присутствии большого избытка бромистого этила. Таким образом, обычные методы замены галоида на водород оказались в нашем случае непригодными.

В 1949 г. Г. П. Меньшиков при изучении строения алкалоида гелиотрина успешно элиминировал введенный им атом хлора действием водного раствора двуххлористого хрома (¹⁰). Этот прием был бы неприменим в нашем случае ввиду полной нерастворимости изучаемого нами дихлорида в воде, однако нам удалось найти другой подходящий растворитель — этилацетат. В нем достаточно хорошо растворяются не только дихлорид и CrCl_2 , но также и CrCl_3 , из которого мы получали CrCl_2 прямо в этилацетатном растворе. В этом растворителе нам удалось провести желаемую реакцию при комнатной температуре. Константы полученного таким путем транс-1,4-диизопропилциклогексана приведены в табл. 1. Сопоставление их с константами этого углеводорода из нашей прежней работы (¹) показывает, что по спектрам комбинационного рассеяния конфигурации стереоизомеров были определены правильно.

Тот факт, что синтетический препарат несколько отличается по константам от полученного разгонкой (¹) и имевшего высокую степень чистоты, объясняется присутствием в первом небольшой примеси цис-изомера.

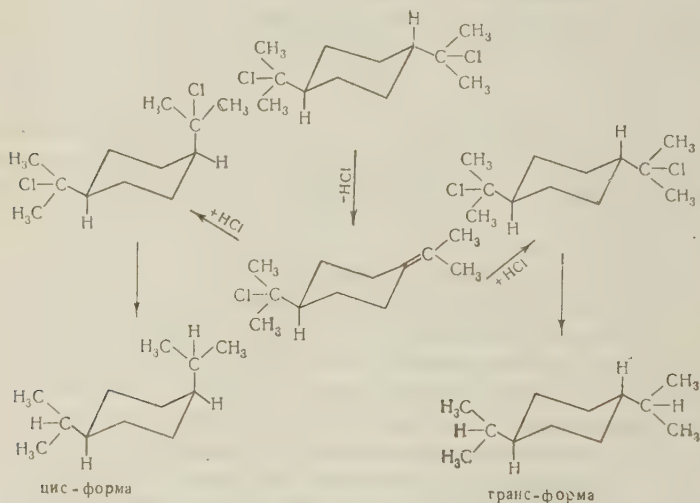
ри (7—10%). Так как четкие температуры плавления диола и дихлорида позволяют думать, что они не могли содержать столь большого количества другой формы, следует полагать, что образование стереоизомерной примеси произошло, вероятно, в процессе элиминирования хлора. По всей вероятности, в ходе этой реакции при местных перегревах происходит частичное отщепление хлористого водорода. Затем хлористый водород, concentra-

Таблица 1

Сравнение констант стереоизомерных 1,4-диизопропилциклогексанов

1,4-диизопропилциклогексан	Т. кип., °C/7,5 мм	Т. замерз., °C	n_D^{20}	d_4^{20}
Транс-изомер, полученный в данной работе	80,1—81,1	—29,7	1,4488	0,8152
Транс-изомер, полученный в (1) (степень чистоты 99,6%)	80,4	—28,0	1,4485	0,8143
Цис-изомер, полученный в (1) (степень чистоты 99,7%)	78,9	—52,9	1,4524	0,8236

ция которого в условиях реакции довольно высока, может снова присоединиться по образовавшейся двойной связи с возникновением при этом цис- и транс-форм. В результате дальнейшего элиминирования хлора одна из этих форм дает стереоизомерную примесь, например:



Все же эта побочная реакция протекает, очевидно, в незначительной степени и элиминирование хлора приводит преимущественно к транс-изомеру. Таким образом, сделанный нами ранее вывод, что нижекипящий 1,4-диизопропилциклогексан имеет цис-, а вышекипящий — транс-строение, получил дополнительное подтверждение.

Экспериментальная часть

Раствор CrCl_3 в этилацетате. В фарфоровую чашку помещалось 30 г перекристаллизованного хромпика и 180 мл конц. соляной кислоты и смесь нагревалась на водяной бане до прекращения выделения хлора; соляная кислота добавлялась по мере израсходования. Затем реакционная смесь упаривалась до получения вязкой клейкой массы, которую по охлаждении переносили в банку с 350 мл сухого этилацетата, ос-

всвобожденного от этилового спирта. Хлорный хром растворялся * с образованием темно-бурого раствора. По мере надобности этот раствор отфильтровывался от нерастворимого KCl и насыщался сухим хлористым водородом; при этом окраска раствора переходила в темно-малиновую.

Восстановление транс-1,4-бис-(α -хлоризопропил)-циклогексана. В круглодонную четырехгорлую колбу на 1 л с ртутным затвором, мешалкой, капельной воронкой, а также с вводной и выводной трубками для водорода, закрытыми склянками Тищенко с серной кислотой, было помещено 63 г цинковой пыли. Затем воздух из колбы вытеснили водородом и из капельной воронки осторожно прилили 165 мл раствора SnCl_4 в этилацетате, насыщенного сухим HCl. Когда весь раствор был прилит и реакция закончилась (цвет раствора стал чисто-голубым), реакционная смесь была охлаждена до комнатной температуры и к ней прилит раствор 5,0 г транс-1,4-бис-(α -хлоризопропил)-циклогексана в 200 мл этилацетата. Размешивание производилось в течение 75 час. круглосуточно, причем постепенно было добавлено 350 мл насыщенного раствора сухого HCl в этилацетате порциями по 10—20 мл в 18 приемов; за это время цинк растворился почти полностью. Затем реакционная смесь была вылита в тройной объем воды, и из колбы Фаворского отогнан весь погон, переходивший до 100°. Дистиллат высаливался поташом. Этилацетат отгонялся от высушенного верхнего слоя из маленькой колбы Фаворского, в которую раствор непрерывно подавался во время разгонки из капельной воронки. Остаток (4,8 г) был соединен с аналогичным остатком (3,1 г) от параллельного опыта с 4 г дихлорида. Соединенный остаток был обработан двумя порциями по 1 мл конц. серной кислоты (поглотилось 3 мл вещества), вымыт водой, высушен и прохроматографирован на силикагеле. При этом была получена фракция (2,45 г), свойства которой даны в табл. 1. Следующая фракция давала уже положительную реакцию на непредельные и галоид.

В спектре комбинационного рассеяния полученной таким путем диизопропилциклогексановой фракции ** присутствовали все линии, характерные для вышекипящего изомера, ранее признанного транс-формой, однако, по этим спектральным данным, во фракции присутствовало и 7—10% цис-изомера. Содержание примеси цис-формы на основании температуры замерзания и ранее найденной ⁽¹⁾ криоскопической константы транс-формы (0,043 мсл. доли на градус) составляло 9%; при допущении аддитивности показателей преломления и удельных объемов содержание этой примеси составляет 8% по обеим константам. Выход фракции составлял 69% от теоретического, считая на дихлорид.

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского
Академии наук СССР

Поступило
25 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Л. Либман, Т. В. Лапшина, Б. А. Казанский, ДАН, 107, 93 (1956). ² В. Т. Алексанян, Х. Е. Стерин и др., Сборн. Исследования по экспериментальной и теоретической физике. Памяти Григория Самуиловича Ландсберга, Изд. АН СССР, 1959, стр. 43. ³ П. А. Бажулин, А. И. Соколовская и др., Изв. АН СССР, ОХН, 1956, 1130. ⁴ G. A. Haggis, L. N. Owen, J. Chem. Soc., 1953, 408. ⁵ S. F. Birch, R. A. Dean, J. Chem. Soc., 1953, 2457. ⁶ E. L. Eliel, R. G. Haber, J. Org. Chem., 23, 2041 (1958). ⁷ W. H. Mills, G. H. Keats, J. Chem. Soc., 1935, 1373. ⁸ R. Malachowski, J. Jankiewiczówna, Ber., 67, 1783 (1934). ⁹ M. Busch, H. Stove, Ber., 49, 1063 (1916). ¹⁰ Г. П. Меньшиков, ЖОХ, 19, 1702 (1949).

* Если упаривание производилось до получения твердого сухого остатка, растворение происходило плохо и требовало нескольких дней.

** Анализ спектра произведен В. Т. Алексаняном и Х. Е. Стериним (Комиссия по спектроскопии ОФМН АН СССР), которым мы пользуемся случаем высказать свою благодарность.

К. Н. МОЧАЛОВ и Г. Г. ГИЛЬМАНШИН

ПОЛЯРОГРАФИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ БОРОГИДРИДОВ НАТРИЯ, КАЛИЯ И ЛИТИЯ

(Представлено академиком И. И. Черняевым 26 XII 1959)

Несмотря на то, что по борогидридам щелочных металлов существует обширная литература (1-5), многие свойства их, в частности поляррографические, изучены недостаточно. По поляррографии борогидридов опубликовано лишь две работы, данные которых резко противоречивы

и весьма ограничены, поскольку они касаются только одного представителя этого класса соединений — NaBH_4 . Р. Л. Пексок (6), изучавший поляррографическим методом окисление и гидролиз борогидрида натрия, нашел для него (при $\text{pH} > 9$) анодную волну с $E_{1/2} = +0,105 - 0,013$ рН, тогда как в более ранней работе Е. Д. Маршалла и Р. А. Видинга (7) получено $E_{1/2} = -0,6$ в (н. к. э.). Это сильное расхождение Пексок объясняет наличием примесей в препарате, которым располагали предшествующие авторы, но и в собственной работе он применял технический продукт чистотой около 95%. Отмечая явную необратимость анодного процесса окисления NaBH_4 , Пексок тем не менее использует уравнение Ильковича и приходит к заключению, что реакция протекает с участием восьми электронов: $\text{BH}_4^- + 8\text{OH}^- = \text{BO}_2^- + 6\text{H}_2\text{O} + 8\text{e}$.

В нашей лаборатории в ходе работ по применению борогидридов в аналитической химии (8) было предпринято изучение поляррографического поведения NaBH_4 , KBH_4 и LiBH_4 . Для этого применялись препараты как технические (~80%) *, так и очищенные, по методике, описанной в (8), и содержавшие более 98% борогидрида.

Поляррографирование производилось на микрополяррографе Гейровского, модель М-102 с ртутным капельным электродом (константа капилляра $K = 3,14 \cdot 2,6^{1/2} = 2,50$). При измерениях потенциалов применялся прецизионный вольтметр. Тщательное обследование анодной и катод-

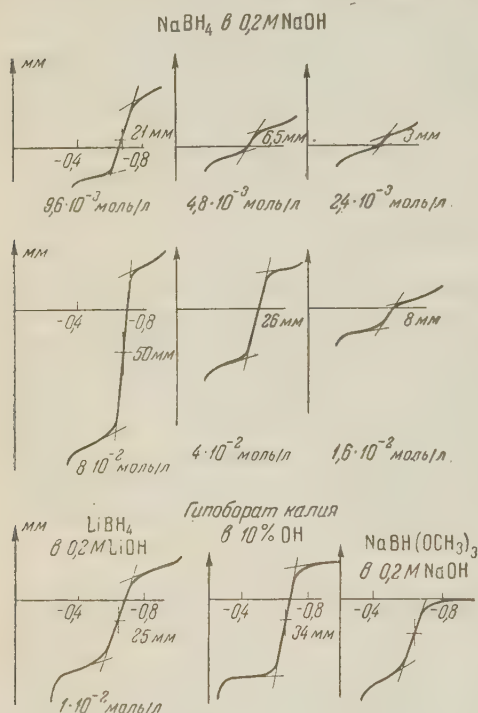


Рис. 1

* Предоставлены нам А. Ф. Жигачем.

ой областей всей полярографической кривой в интервале от $+0,2$ в $-2,0$ в показало наличие для раствора NaBH_4 в NaOH единственной подной волны с $E_{1/2} = -0,65$ в. Эта волна уменьшалась с течением времени по мере разложения NaBH_4 — и наконец исчезла вовсе. Она исчезла также в результате разрушения борогидрида кипячением и подкислением раствора. Она одинаково хорошо выражена как в случае очищенного NaBH_4 , так и технического. Присутствовавшие в последнем примеси, главным образом алкоголяты, ничем себя на полярограммах не проявили. Не дал никакой волны и специально приготовленный алкогольат. Принадлежность наблюдаемой волны иону BH_4^- была затем проверена опытами очищенными и неочищенными KBH_4 и LiBH_4 в растворах KOH и LiOH соответственно. Оба эти борогидрида дали ту же самую волну и вели себя при полярографировании аналогично NaBH_4 (рис. 1, табл. 1). Положение характер волны практически не менялись при вариациях концентраций борогидридов и при изменениях состава фона — введении хлоридов и пр.

Таким образом, не остается сомнений, что указанная волна обусловлена ионами BH_4^- и что никакой другой волны эти ионы не порождают.

Полученный результат опровергает данные Пексока. Из свойств борогидридной волны прежде всего нами была изучена зависимость ее высоты от концентрации ионов BH_4^- . В исследованном диапазоне концентраций 10^{-3} до 10^{-1} моль/л эта зависимость носит линейный характер. Отсутствие пропорциональности между током и корнем квадратным из эффективного давления на капаящую электрод указывает на то, что преломительный ток является не полностью диффузионным.

Борогидриды металлов в водных растворах, особенно в кислых, сравнительно быстро разлагаются, вследствие чего полярографирование в этих условиях крайне затруднительно. Именно поэтому рабочие растворы готовились нами с применением соответствующих щелочей и щелочных богатных буферных смесей, которые одновременно служили и фоном. При выборе наиболее удобной для работы области значений рН растворов нами было сделано весьма важное наблюдение. Обнаружено, что высота волны борогидрида при одной и той же его концентрации в сильной степени зависит от рН среды. Она закономерно изменяется с изменением рН антибатом последнему. В растворах с достаточно высоким рН (выше 12,5), в которых борогидриды относительно стабильны, волна практически отсутствует. Отсюда логически следует, что наблюдаемая волна принадлежит действительно не иону BH_4^- , а какому-то из продуктов его гидролиза. рядом исследований (⁹⁻¹¹) установлено, что гидролиз борогидридов протекает в несколько стадий, на одной из которых при известных условиях выделяется диборан. Последний, как и тетраборан, способен реагировать со щелочами, образуя так называемые гипобораты.

Работами В. И. Михеевой, В. Ю. Сурс (¹³) экспериментально показано, что гипобораты можно рассматривать как продукты отдельных ста-

Таблица 1

pH	$E_{1/2}$	tg α
NaBH_4 , $4,8 \cdot 10^{-3}$ моль/л		
9,24	-0,636	0,073
9,36	-0,649	0,088
9,50	-0,644	0,077
9,68	-0,658	0,063
9,97	-0,644	0,074
11,07	-0,652	0,065
0,17—0,2 N NaOH	-0,658	0,068
	-0,650	0,066
KBH_4 , $5,7 \cdot 10^{-3}$ моль/л		
10,82	-0,672	0,056
LiBH_4 , $1 \cdot 10^{-1}$ моль/л		
Водный раствор после нагрев. до 70°	-0,65	0,063
Гипоборат калия $1,5 \cdot 10^{-3}$ моль/л		
10% KOH	-0,664	0,083
$\text{NaBH}(\text{OCH}_3)_3$, $1,77 \cdot 10^{-2}$ моль/л		
0,2 M NaOH	-0,655	0,059

дий гидролиза борогидридов по схеме



И. Губо и Х. Калльфасс (¹⁴), работая методом инфракрасной спектроскопии, не обнаружили полос поглощения, которые можно было бы приписать ионам $\text{BH}_2(\text{OH})_2^-$ и $\text{BH}(\text{OH})_3^-$, но это не противоречит приведенной схеме, ибо, как отмечают сами авторы, «ненаблюдаемость» промежуточных продуктов, вероятно, связана с их повышенной реакционной способностью.

Мы пропускали газообразный диборан в концентрированные растворы КОН, NaOH и LiOH при охлаждении *. Полученные растворы гипоборатов дали при полярографировании одну и ту же волну с $E_{1/2} = -0,6$ в. Разбавление этих растворов приводило, как и в случае растворов борогидридов, к пропорциональному уменьшению высоты волны. При стоянии растворов высота «гипоборатной» волны с течением времени падает, как и «борогидридной», по уравнению кинетики 1-го порядка (по гипоборату и борогидриду соответственно) (⁸). Волна практически исчезает при кипячении растворов, а также при сильном подкислении их, вследствие разрушения гипоборатов.

На основании приведенных данных необходимо заключить, что «борогидридная» волна по существу является «гипоборатной».

Вопрос о том, какому из трех гипоборатов, образующихся при гидролизе, соответствует полярографическая волна, весьма труден для разрешения, так как иметь для экспериментов растворы каждого из гипоборатов без примеси остальных, по-видимому, невозможно. Тем не менее на этот счет можно высказать следующие соображения.

Х. В. Шифриным и А. С. Богоносцевым в нашей лаборатории изучалось титрование йодатом калия растворов борогидридов и гипоборатов в ходе их гидролиза при комнатной температуре и при нагревании. Оказалось, что свежеприготовленные растворы борогидрида лития и гипобората лития, которые должны содержать, согласно работам (^{11,13}), только первый продукт гидролиза $\text{LiBH}_3(\text{OH})$, титруются йодатом, но полярографической волны не дают. Следовательно, волна не может принадлежать иону $\text{BH}_3^-(\text{OH})$. При нагревании указанных растворов до 60° и выше волна появляется, а при дальнейшем нагревании растворов сохраняется до тех пор, пока сохраняется титруемость растворов. Так как последним титрующимся продуктом гидролиза является ион $\text{BH}(\text{OH})_3^-$, то он и должен быть ответственным за полярографическую волну. Это подтверждается нашими опытами с триметоксиборогидридом натрия $\text{NaBH}(\text{OCH}_3)_3$ **, анион которого, подобно иону $\text{BH}(\text{OH})_3^-$, содержит только один активный водород (непосредственно связанный с бором) и дает ту же волну с $E_{1/2} = -0,65$ в (табл. 1).

Электродная реакция, обуславливающая наблюдаемую полярографическую волну, очевидно, не может, вопреки Пексоку, заключаться в окислении ионов BH_4^- с участием восьми электронов, а должна состоять в окислении гипоборат-ионов, например по уравнению: $\text{BH}(\text{OH})_3^- + \text{OH}^- \rightarrow \text{BO}_2^- + 2\text{H}_2\text{O} + \text{H} + \bar{e}$ или $\text{BH}(\text{OH})_3^- + 2\text{OH}^- \rightarrow \text{BO}_2^- \cdot 2\text{H}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} + 2\bar{e}$.

Первая из этих схем согласуется с величиной тангенса угла наклона графиков $\frac{i}{i_a - i} = f(E)$ для борогидридов и гипоборатов, близкой к 0,05 (табл. 1), как это имеет место в реакциях с участием одного электрона. В пользу второй схемы говорят стехиометрические данные проводившиеся в нашей лаборатории йодатометрического титрования $\text{NaBH}(\text{OCH}_3)_3$.

* Диборан получался при помощи электрического разряда О. И. Русецким.

** Предоставлен нам В. И. Михеевой и Т. Н. Дымовой.

Изучавшаяся Пексоком посредством полярографического метода кинетика относится по существу не к реакциям борогидрида натрия, к гидролизу и окислению промежуточных продуктов. Но и в этом случае результаты исследования нельзя считать достоверными, так как они получены без учета каталитического влияния ртути, которое по нашим данным весьма значительно.

Институт общей и неорганической химии
Академии наук СССР

Поступило
15 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

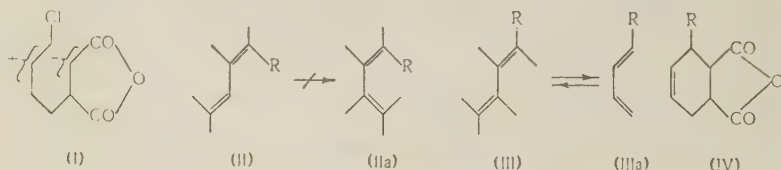
- ¹ H. I. Schlesinger, H. C. Brown et al., J. Am. Chem. Soc., 75, 186 (1953).
E. Wiberg Angew. chem., 65, 16 (1953). ³ В. И. Михеева, Усп. хим., 23, 7, 831 (1954). ⁴ E. H. Jensen, A Study on Sodium Borohydride, Copenhagen, 1954.
N. G. Gaylord, Reduction with Complex Hydrides, N. Y., 1956. ⁶ R. L. Пексок, J. Am. Chem. Soc., 75, № 12, 2862 (1953). ⁷ E. D. Marshall, R. A. Wiling, Atom. Energy Commission Document 2914 (June, 1950); цит. по (6). ⁸ К. Н. Моалов, Х. В. Шифрин, А. С. Богоносцев, Тр. Казанск. хим.-технол. инст., 26 (1960). ⁹ H. I. Schlesinger, A. B. Burg, J. Am. Chem. Soc., 62, 3429 (1940). ¹⁰ M. Kilpatrick, C. D. McKinney, ibid., 72, 5474 (1950).
В. И. Михеева, Е. М. Феднева, ДАН, 101, № 1, 99 (1955). ¹² F. G. A. Stone, Quarterly Reviews, 9, № 2, 199 (1955). ¹³ В. И. Михеева, В. Ю. Сурс, ДАН, 3, 67 (1953). ¹⁴ J. Gonbeau, H. Kallfass, Zs. anorg. u. allgem. Chem., B 299, 3, 4, 167 (1959).

А. С. ОНИЩЕНКО и Н. И. АРОНОВА

ЦИС- И ТРАНС-1-ГАЛОИДБУТАДИЕНЫ И ИХ ОТНОШЕНИЕ К ДИЕНОВОМУ СИНТЕЗУ

(Представлено академиком Б. А. Казанским 8 I 1960)

В ряде работ (¹⁻⁴) сообщалось, что 1-хлорбутадиен-1,3 не вступает в диеновый синтез. Такое его поведение было объяснено стабилизирующим влиянием атома хлора при C₁ в промежуточной карбониевой системе (I), не способной ввиду этого к замыканию цикла (⁵)



Однако способность 1-замещенных бутадиенов к реакциям диенового синтеза зависит и от их геометрической изомерии. Известно, что *цис*-изомеры (II, R = CH₃, C₆H₅, CN и др.), строение которых затрудняет их конверсию в *цисоидную* конформацию (IIIa), в эту реакцию присоединения не вступают, тогда как *транс*-диены (III), для которых может иметь место легкая конверсия в необходимую для диенового синтеза *цисоидную* конформацию (IIIa), с хорошим выходом дают нормальные аддукты (⁶⁻¹¹). Из того факта, что 1-хлор-2-метил- (^{12,13}), 1-хлор-3-метил- (¹⁴) и 1,4-дихлорбутадиены (¹⁵) легко реагируют с малеиновым ангидридом, также следует заключить, что эти диены являются *транс*-изомерами. О геометрической изомерии 1-галогидбутадиенов до настоящего времени ничего не было известно, и можно было только предполагать, что их *транс*-изомеры (III, R = Cl, Br) должны вступать в реакцию диенового синтеза, тогда как *цис*-изомеры (II, R = Cl, Br) к этой реакции не будут способны.

Нами было установлено, что 1-хлорбутадиен, полученный дегидрохлорированием 1,4-дихлорбутена-2 (^{2,3,16}), является смесью *цис*- и *транс*-изомеров в соотношении примерно 9 : 1, разделить которую не удастся на колонке в 25 т. т. При взаимодействии этой смеси с малеиновым ангидридом (50—55°, 12 час.) с выходом до 10% образуется нормальный продукт диенового синтеза, строение которого было доказано дегидрированием во фталевый ангидрид. Этот факт с несомненностью показывает, что в исходной смеси содержится около 10% *транс*-1-хлорбутадиена, который и образует аддукт.

Оставшийся после выделения аддукта *цис*-изомер, в соответствии со своей конфигурацией, действительно не способен вступать в диеновый синтез. Однако в присутствии йода *цис*-1-хлорбутадиен сравнительно легко превращается в *транс*-изомер, давая равновесную смесь *цис*- и *транс*-форм, подобно тому как это имеет место в случае *цис*-пиперилена (¹⁷). В результате этого при нагревании смеси *цис*-1-хлорбутадиена с малеиновым ангидридом в присутствии йода происходит постепенное образование аддукта, отвечающего *транс*-изомеру, выход которого может достигать 80%. Такое превращение *цис*-1-хлорбутадиена в *транс*-форму происходит и при комнатной температуре, однако скорость реакции при этом невелика. Были

ты и изучены спектры комбинационного рассеяния света цис- и смеси цис- и транс-изомеров 1-хлорбутадиена-1,3⁽¹⁸⁾. Аналогично 1-бромбутадиен-1,3, полученный дегидробромированием 1,4-дибромбутена-2^(3,19), является смесью цис- и транс-изомеров (II + III, R = Br) в соотношении примерно 1:1, что было доказано конденсацией транс-изомера с малеиновым ангидридом и выделением цис-изомера. Цис-1-бромбутадиен под влиянием йода также изомеризуется в транс-форму, дающую с малеиновым ангидридом аддукт, который уже в условиях опыта (~70°, 100 час.) отщепляет бромидный водород и присоединяет новую молекулу малеинового ангидрида, давая бис-ангидрид состава C₁₂H₈O₆.

Экспериментальная часть

1-Хлорбутадиен-1,3 (II+III, R = Cl), полученный из 1,4-хлорбутена, имел следующие константы: т. кип. 66—67° при 760 м, n_D^{20} 1,4712; d_4^{20} 0,9537. MR найдено 25,93. C₄H₅Cl, F₂, вычислено 24,61. λ = 232, ϵ = 17400.

Ангидрид 3-хлор- Δ^4 -циклогексен-1,2-дикарбонной кислоты (IV, R = Cl). Смесь 88,5 г (1 моль) 1-хлорбутадиена 18,3 г (0,3 моля) малеинового ангидрида (+ гидрохинон) оставили на ночь при комнатной температуре, а затем нагревали 12 час. при 50—55°. Вышедший кристаллический продукт реакции отфильтровали, получили 18,3 г (10%) ангидрида (IV), который после перекристаллизации из смеси бензола с ацетоном имел т. пл. 130—131°.

Найдено %: C 51,42; H 3,78; Cl 19,24

C₈H₇O₃Cl. Вычислено %: C 51,48; H 3,78; Cl 19,01.

Нагревание аддукта с серой (~230°) до прекращения выделения серодорода приводит к образованию фталевого ангидрида с т. пл. 130—131°, идентичного с заведомым образцом.

Цис-1-хлорбутадиен-1,3 (II, R = Cl). К оставшемуся после выделения аддукта диену прибавили 5 г малеинового ангидрида и раствор нагревали при 50—55° еще 12 час. Дальнейшего образования аддукта не наблюдалось. Не вступивший в реакцию цис-1-хлорбутадиен отогнали на колонке в 25 т. т. Получили 68 г (~78%) чистого цис-диена (II); т. кип. 68—67°, n_D^{20} 1,4703; d_4^{20} 0,9553. MR найдено 25,86. C₄H₅Cl, F₂, вычислено 24,61; λ = 232, ϵ = 17400.

Найдено %: C 54,34; H 5,74; Cl 40,05

C₄H₅Cl. Вычислено %: C 54,26; H 5,70; Cl 40,05.

Изомеризация цис-1-хлорбутадиена (II) в транс-изомер (III). 50 г чистого цис-изомера, 1 г йода и 50 мл сухого толуола в ампуле нагревали при 100° в течение 20 час. После удаления йода посольфитом натрия смесь изомеров разогнали на колонке (25 т. т.):

	Т. кип., °C	Колич., г	n_D^{20}	d_4^{20}
1 фракция	66,8—67	20,0	1,4703	—
2 фракция	67,0—67,2	7,5	1,4720	0,9608
3 фракция	67,2—67,5	4,2	1,4724	0,9608
4 фракция	67,5	2,4	1,4724	0,9608

К 5 мл сухого толуола прибавили 3,7 г 3 фракции диена и 1 г малеинового ангидрида (+ гидрохинон), после чего смесь нагревали в ампуле при 60° в течение 6 час. Получили 0,7 г кристаллического аддукта (IV), идентичного описанному выше с т. пл. 130°.

Конденсация смеси цис- и транс-1-хлорбутадиенов с малеиновым ангидридом в присутствии йода. а) К раствору 3,7 г исходной смеси изомеров 1-хлорбутадиена и 4 г малеинового ангидрида в 20 мл бензола прибавили 2% йода и небольшое

количество гидрохинона, и смесь нагревали 24 часа на кипящей водяной бане в запаянной ампуле. Получили 5 г аддукта (IV) с т. пл. 130°.

б) 1,7 г (0,02 моля) 1-хлорбутadiена, 1,9 г (0,02 моля) малеинового ангидрида, 2% йода и следы гидрохинона прибавили к 10 мл сухого бензола и эту смесь в запаянной ампуле оставили при комнатной температуре на 6 мес. Выделившийся кристаллический аддукт отделили, получили 2,8 г (80%) описанного выше аддукта (IV), т. пл. 130,5°.

1-Бромбутadiен-1,3 (II + III, R = —Br), полученный из 1,4-дибромбутена-2 (т. пл. 53°) имел следующие константы: т. кип. 47—48°, при 161 мм, n_D^{20} 1,5112, d_4^{20} 1,3777. MR_D найдено 28,78. C_4H_5Br , F₂ вычислено 27,5.

Ангидрид 3-бром- Δ^4 -циклогексен-1,2-дикарбоновой кислоты (IV, R = Br). Смесь 56 г исходного 1-бромбутadiена (II + III) и 5 г малеинового ангидрида в присутствии гидрохинона оставили при 25—30° на 5 дней. Выделившийся кристаллический продукт реакции отделили, получили 7 г (~7%) аддукта (IV), с т. пл. 107—109° с разложением (из бензола).

Найдено %: C 41,62; H 3,09; Br 34,16
 $C_8H_7O_3Br$. Вычислено %: C 41,58; H 3,05; Br 34,16.

Сплавление этого аддукта с серой при 230—235° до прекращения выделения сероводорода приводит к фталевому ангидриду с т. пл. 130° не дающему депрессии с заведомым образцом.

Цис-1-бромбутadiен-1,3 (II, R = Br). Оставшуюся после отделения аддукта жидкую смесь перегнали с дефлегматором, и после повторной перегонки над натрием получили чистый цис-1-бромбутadiен-1,3 (II) с т. кип. 47—48° при 161 мм; n_D^{20} 1,5100, d_4^{20} 1,3878. MR_D найден 28,68, C_4H_5Br , F₂ вычислено 27,50.

Найдено %: C 36,32; H 3,84; Br 59,36
 C_4H_5Br . Вычислено %: C 36,12; H 3,78; Br 60,09

Конденсация смеси цис- и транс-1-бромбутadiенов с малеиновым ангидридом в присутствии йода. Смесь 22 г (0,17 моля) исходного 1-бромбутadiена, 18,6 г (0,17 моля) малеинового ангидрида и 0,4 г йода в 50 мл сухого бензола в запаянной ампуле нагревали 100 час. при 70°. Получили 8,3 г кристаллического (сырого) продукта, выход 37%. Вещество трудно растворяется в ацетоне, уксусном ангидриде и является бис-ангидридом состава $C_{12}H_8O_6$ с т. пл. 364°.

Найдено %: C 58,20; H 3,46
 $C_{12}H_8O_6$. Вычислено %: C 58,07; H 3,25

Гидролизует щелочью, как ангидрид четырехосновной кислоты

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского
Академии наук СССР

Поступило
2 I 1960

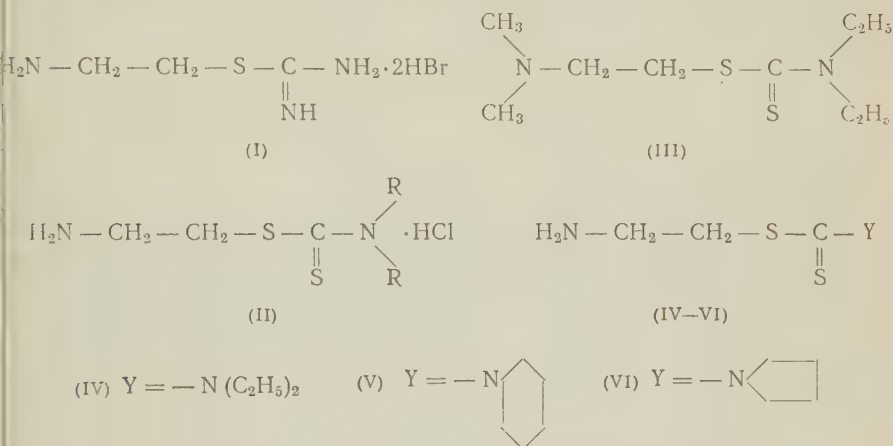
ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. D. Coffman, W. H. Carothers, J. Am. Chem. Soc., 55, 2040 (1933).
² А. А. Петров, Н. П. Сонов, ЖОХ, 15, 981 (1945). ³ А. Л. Клебanskiй, Р. М. Сорокина, З. Я. Хавин, ЖОХ, 17, 235 (1947). ⁴ В. С. Миклашевская, А. А. Петров, ЖОХ, 28, 1125 (1958). ⁵ M. J. S. Dewar, The Electron Theory of Organic Chemistry, Oxford, 1950, p. 152. ⁶ K. Alder, Ann., 571, 157 (1951).
⁷ K. Alder, M. Schumacher, In Fortschritte der Chemie Organischer Naturstoffe, 10, 1 (1953). ⁸ D. Craig, J. Am. Chem. Soc., 72, 1678 (1950). ⁹ H. R. Snyder, J. M. Stewart, R. L. Myers, J. Am. Chem. Soc., 71, 1055 (1949). ¹⁰ O. Grunmitt, E. Christoph, J. Am. Chem. Soc., 71, 4157 (1949); 73, 3479 (1951).
¹¹ H. R. Snyder, G. Poos, J. Am. Chem. Soc., 72, 4104 (1950). ¹² Д. В. Тищенко, ЖОХ, 6, 1131 (1936). ¹³ W. J. Jones, H. G. Williams, J. Chem. Soc. 1939, 829. ¹⁴ Т. А. Фаворская, ЖОХ, 9, 386 (1939). ¹⁵ R. Criege, W. H. Rauf, W. D. Schellenberg, Ber., 86, 125 (1953). ¹⁶ J. E. Muskat, H. I. Northrup, J. Am. Chem. Soc., 52, 4043 (1931); Am. pat. 2038593 (1936); Chem. Abstr. 30, 3912 (1936); Chem. Zbl., 2, 3358 (1936). ¹⁷ R. L. Frank, R. D. Emmie, R. S. Johnson, J. Am. Chem. Soc., 69, 2313 (1947). ¹⁸ М. И. Батуев, А. С. Онущенко и др., ДАН, 132, № 3 (1960). ¹⁹ А. А. Петров, ЖОХ, 10, 1887 (1940).

Я. ПОСТОВСКИЙ, Н. Ф. КАЗАРИНОВА, Г. Б. АФАНАСЬЕВА и Н. И. ЛАТОШ
НОВЫЕ ЭФИРЫ ДИТИОКАРБАМИНОВЫХ КИСЛОТ

(Представлено академиком Б. А. Казанским 17 I 1960)

В связи с появлением в литературе данных о защитных свойствах β-аминоэтилдитиоуронийбромида (I) (антирадон, АЭТ) от действия ионизирующих излучений (^{1,2}) представляло интерес синтезировать соединения с родствен- нм строением, а именно β-аминоэтилдитиокарбаматы (II).



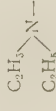


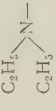
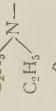

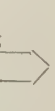

В патентной литературе описано одно соединение этого строения — β-ди- тиламиноэтиловый эфир диэтилдитиокарбаминовой кислоты (III) (³). нами были получены новые карбаматы с незамещенной аминогруппой (IV, VI). Эти вещества образуются при взаимодействии β-хлорэтиламина с натриевыми солями соответствующих дитиокарбаминовых кислот (диэтил- тиокарбаматом натрия, тетраметилендитиокарбаматом натрия и пепта- тилендитиокарбаматом натрия). Продукты изолированы в виде хорошо и- stallизующихся хлоргидратов (табл. 1).

Таблица 1

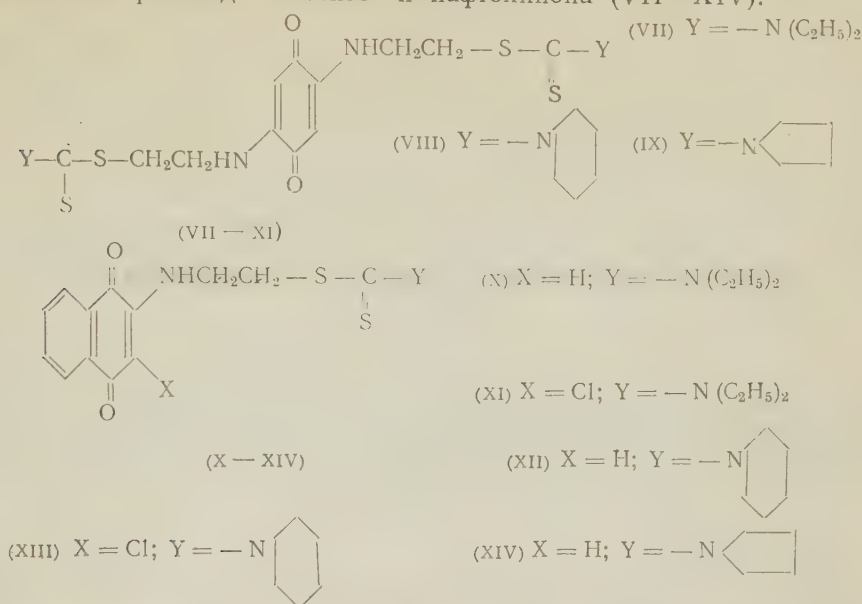
β-Аминоэтилдитиокарбаматы

Y	Вещество	Раствори- тель для кристал- лизации	Т-ра плавл., °C	Выход, %	Брутто-формула	N, %		S, %	
						найд.	вычисл.	найд.	вычисл.
$\begin{array}{c} \text{C}_2\text{H}_5 \\ \diagup \text{N} \\ \text{C}_2\text{H}_5 \end{array}$	β-Аминоэтилди- этилдитиокарба- мат (хлоргид- рат)	Этилаце- тат	122—124	61	$\text{C}_7\text{H}_{16}\text{N}_2\text{S}_2 \cdot \text{HCl}$	12,50	12,25	27,91	28,08
$\begin{array}{c} \diagup \text{N} \\ \diagdown \end{array}$	β-Аминоэтилпеп- таметилендитио- карбамат (хлор- гидрат)	Этилаце- тат + спирт	187—189	59	$\text{C}_9\text{H}_{18}\text{N}_2\text{S}_2 \cdot \text{HCl}$	11,15	11,43	26,40	26,66
$\begin{array}{c} \diagup \text{N} \\ \diagdown \end{array}$	β-Аминоэтилтет- раметилендитио- карбамат (хлор- гидрат)	Спирт	184—186	60	$\text{C}_7\text{H}_{14}\text{N}_2\text{S}_2 \cdot \text{HCl}$	12,13	12,36	28,10	28,25

Продукты взаимодействия β-аминоэтилдитиокарбаматов с хинонами

№ веще- ства	X	Y	Название вещества	Вид кристаллов под микроскопом	Растворитель для кристал- лизации	Т. плавл., °C	Выход, %	Брутто формула	N, %		S, %	
									найд.	вы- числ.	найд.	вы- числ.
VII	H		2,5-бис [β-(диэтилдитиокарбамино)-этиламино]-бензохинон	Мелк. красн.	Диметилформ-амид	182—184	52	$C_{26}H_{24}O_2N_4S_4$	11,44	11,47	26,05	26,25
VIII	H		2,5-бис [β-(пентаметилдитиокарбамино)-этиламино]-бензохинон	Оч. мелк. красн.	Диметилформ-амид	223—225	51	$C_{32}H_{30}O_2N_4S_4$	10,99	10,85	25,63	25,00
IX	H		2,5-бис [β-(тетраметилдитиокарбамино)-этиламино]-бензохинон	Оч. мелк. кирпично-красн.	Диметилформ-амид	226—228	53	$C_{26}H_{22}O_2N_4S_4$	11,18	11,51	26,40	26,44
X	H		2-[β-(диэтилдитиокарбамино)-этиламино]-нафтохинон-1,4	Оранжево красн.	Диметилформ-амид	113—115	59	$C_{17}H_{20}O_2N_2S_2$	8,19	8,04	18,80	18,39
XI	Cl		2-[β-(диэтилдитиокарбамино)-3-хлорнафтохинон-1,4	Красн.	Этиловый спирт	135—137	57	$C_{17}H_{19}O_2N_2S_2Cl$	6,96	7,32	16,96	16,73
XII	H		2-[β-(пентаметилдитиокарбамино)-этиламино]-нафтохинон-1,4	Красн.	Диметилформ-амид	176—177	54	$C_{18}H_{20}O_2N_2S_2$	7,79	7,78	18,02	17,77
XIII	Cl		2-[β-(пентаметилдитиокарбамино)-этиламино]-3-хлорнафтохинон-1,4	Красн.	Диметилформ-амид	172—173	50	$C_{17}H_{19}O_2N_2S_2$	7,84	8,19	18,80	18,59
XIV	H		2-[β-(тетраметилдитиокарбамино)-этиламино]-нафтохинон-1,4	Оранжев.	Диметилформ-амид	144—146	53	$C_{18}H_{19}O_2N_2S_2Cl$	7,12	7,10	16,90	16,22

Используя известную реакцию аминов с хинонами, мы осуществили синтез новых производных бензо- и нафтохинона (VII—XIV).



Интерес к такого рода соединениям возник в связи с тем, что в последнее время стали известны новые физиологически активные хиноны (⁴⁻⁶), а также новые синтетические лекарственные препараты, содержащие ядро хинона (например, противобактериальные вещества (⁷), этилениминные производные с противоопухолевыми свойствами (^{7,8})).

Производные бензохинона (VII—IX) и нафтохинона (X—XIV), содержащие β-аминоэтилдитиокарбаматные остатки, образуются гладко при взаимодействии свободных аминов (IV, V, VI) с хинонами в эфирном растворе и представляют собой хорошо кристаллизующиеся, труднорастворимые вещества красного цвета (табл. 2).

Экспериментальная часть

Получение дитиокарбаматов. Пентаметилен- и тетраметилендитиокарбаматы натрия получались взаимодействием соответствующих аминов (пиперидина и пирролидина) с сероуглеродом в бензольном растворе в присутствии едкого натра. Дитиокарбаматы были охарактеризованы в виде карбоксиметилпроизводных, которые образуются при взаимодействии натриевых солей дитиокарбаминовых кислот с монохлоруксусной

Таблица 3

Карбоксиметилдитиокарбаматы (Y—C(=S)—S—CH₂COOH)

Y	Вещество	Т-ра плав., °C	Выход, %	Брутто-формула	N, %		S, %	
					найд.	вы- числ.	найд.	вы- числ.
N—	Карбоксиметилди- этилдитиокарбамат	82—84	82	C ₇ H ₁₃ O ₂ NS ₂	7,05	6,76	31,60	30,91
N—	Карбоксиметилпента- метилендитиокар- бамат	139—141	81	C ₉ H ₁₉ O ₂ NS ₂	6,69	6,39	29,60	29,22
N—	Карбоксиметилтетра- метилендитиокар- бамат	141—143	83	C ₇ H ₁₁ O ₂ NS ₂	7,14	6,83	30,82	31,22

кислотой. Карбоксиметилпроизводные представляют собой хорошо кристаллизующиеся из воды бесцветные продукты с сравнительно низкими температурами плавления (табл. 3).

β -Аминоэтилдитиокарбаматы. 0,01 г-мол. соответствующего дитиокарбамата натрия растворялся на холоду в минимальном количестве воды; 0,01 г-мол. хлоргидрата β -хлорэтиламина также растворялся в небольшом количестве воды, и раствор подщелачивался твердым едким натром до сильнощелочной реакции. Оба раствора сливались, и реакционная смесь оставалась стоять при комнатной температуре в течение суток. Выделившееся масло экстрагировалось эфиром. Высушенная эфирная вытяжка насыщалась сухим хлористым водородом, при этом выпадал осадок хлоргидрата β -аминоэтилдитиокарбамата, который отфильтровывался и промывался эфиром.

Реакция аминокетилловых эфиров дитиокарбаминовых кислот с хинонами. К эфирному раствору хинона (0,01 г-мол.) прибавлялся эфирный раствор β -аминоэтилового эфира соответствующей дитиокарбаминовой кислоты в количестве 0,01 г-мол. для нафтохинона и 0,02 г-мол. для бензохинона. При стоянии из раствора выпадали блестящие красно-оранжевые кристаллы.

Институт химии
Уральского филиала
Академии наук СССР

Поступило
21 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. Shapira, D. G. Doherty, W. G. Burnell, *Radiation Res.*, **7**, 22 (1957). ² В. М. Федосеев, С. П. Коваленко и др., *ЖОХ*, **29**, 1703 (1959). ³ Ciba Ltd., Швейц. пат. 253354, 1948; *Chem. Abstr.*, **44** 677 (1950). ⁴ G. Domagk, *Naturwiss.*, **46**, 81 (1959). ⁵ N. R. Trenner, B. H. Arison, R. E. Erikson, C. H. Shunk, D. E. Wolf, K. Folkers, *J. Am. Chem. Soc.*, **81**, 2026 (1959). ⁶ R. Morton, V. Gloor et al., *Helv. Chim. Acta*, **41**, 2357 (1958). ⁷ S. Petersen, W. Gauss, E. Urbschat, *Ang. Chem.*, **67**, 217 (1955). ⁸ W. Gauss, *Chem. Ber.*, **91**, 2216 (1958).

П. И. САНИН, М. Г. ВОРОНКОВ, Е. С. ШЕПЕЛЕВА и Б.-И. ИОНИН

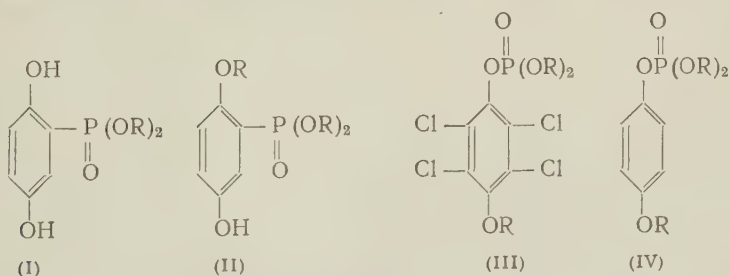
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИАЛКИЛФОСФОРИСТЫХ КИСЛОТ С ХИНОНАМИ

(Представлено академиком А. В. Топчиевым 29 XII 1959)

В предшествующих работах ⁽¹⁻³⁾ была показана высокая активность фосфорорганических соединений как синтетических добавок к смазочным маслам. К таковым, например, относятся некоторые производные дитиофосфорной, фосфорной и фосфористой кислот. Представлялось весьма интересным получить фосфорорганические соединения, которые, помимо других свойств, обладали бы также свойствами антиокислителей, добавок, задерживающих окисление углеводородов кислородом воздуха.

Нами была предпринята попытка осуществить присоединение неполных эфиров фосфористой кислоты, диалкилфосфористых кислот к хинонам. Эта реакция представляла и самостоятельное значение. В. С. Абрамов ^(4,5) следовал реакции взаимодействия диалкилфосфористых кислот с альдегидами и кетонами в присутствии алкоголята. При этом было установлено, что присоединение диалкилфосфористых кислот происходит по карбонильной группе с образованием эфиров α -оксидиалкилфосфиновых кислот. Н. Пудовик, Ю. П. Китаев и Г. Заметаева ⁽⁶⁻⁸⁾ осуществили присоединение диалкилфосфористых кислот также в присутствии алкоголятов к различным непредельным соединениям. Присоединение к непредельным кетонам в этом случае происходит по двойной углерод-углеродной связи.

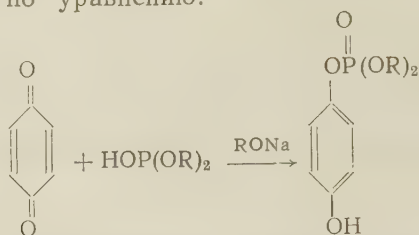
В рассматриваемом нами случае взаимодействие диалкилфосфористых кислот с *n*-бензохиноном предположительно могло привести к образованию эфиров дигидроксифенилфосфиновых кислот (I). На возможность такого направления реакции указывалось



патенте Ледда и Хэрви ⁽⁹⁾. В недавно опубликованной работе ⁽¹⁰⁾ было осуществлено присоединение полных эфиров фосфористой кислоты к *n*-бензохинону и показано, что при этом получают соединения того же типа (II). Кроме того в литературе имеются указания, что реакция присоединения фосфитов к *n*-бензохинону и некоторым его производным может протекать по другому направлению, а именно с образованием соединений, в которых фосфор связан с кислородом. Так, в работе ⁽¹¹⁾ при взаимодействии этилфосфита с хлоранилом в качестве главного продукта реакции получили соединение строения (III). Аналогичное строение авторы ⁽¹²⁾ при-

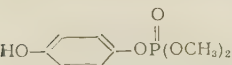
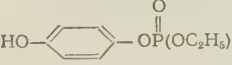
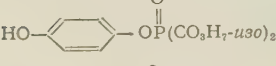
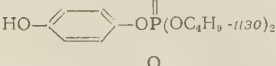
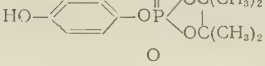
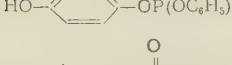
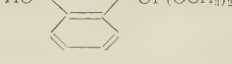
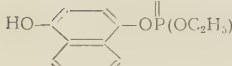
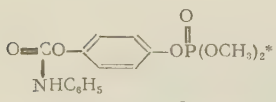
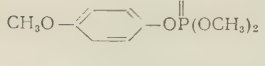
писывают соединениям, полученным в результате реакции триалкилфосфитов с *n*-бензохиноном (IV). Последующие работы (^{13,14}) подтвердили их выводы.

Как нами было установлено, при реакции взаимодействия диалкилфосфористых кислот с *n*-бензохиноном образуются диалкил-*n*-оксифенилфосфаты, и следовательно фосфорная группа присоединяется к кислородному атому бензохинона по уравнению:



Присоединение сопровождается обычным превращением хиноидной структуры кольца в бензоидную. Аналогичным путем протекает взаимодействие

Таблица 1

Эфиры фосфорной кислоты	Т-ра плав., °C	С, %		Н, %		Р, %		ОН, %		Выход, %
		найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено	
	74,5—75,5	43,87 43,75	44,10	5,17 5,07	5,05	14,04 14,28	14,26	7,76 7,89	7,80	70
	38,0—39,0	49,06 48,99	48,80	6,15 6,06	6,09	12,66 12,69	12,60	—	—	41
	49,0—50,0	52,41	52,55	7,07	6,93	11,31	11,40	6,22	6,13	53
	52,5—53,5	55,32 55,44	55,62	7,81 7,82	7,61	10,24 10,31	10,26	5,57 5,21	5,59	50
	154,5	—	—	—	—	11,57	11,40	—	—	62
	93,0—95,0	—	—	—	—	9,30	9,06	—	—	—
	141,0	—	—	—	—	11,47	11,55	—	—	62
	98,5—99,0	—	—	—	—	10,60	10,45	—	—	51
	120,0—124,0	53,37 53,45	53,40	4,77 4,79	4,68	9,16 9,19	9,20	—	—	89
	Т. кип. 153,0—156,0° (3 мм)**	—	—	—	—	13,62	13,37	—	—	42,

* Содержание азота в %: найдено 4,25; 4,35; вычислено 4,15.

** n_D^{20} 1,4968; d_{20}^{20} 1,2511.

гвие диалкилфосфористых кислот и с α -нафтохиноном. В табл. 1 приведены температуры плавления и результаты анализа полученных нами соединений.

Реакция проводилась при эквимолекулярном соотношении *n*-бензохинона (или α -нафтохинона) и диалкилфосфористой кислоты, в присутствии гликолята натрия. В качестве растворителя применялся сухой спирт, содержащий тот же углеводородный радикал, как и алкокси-группы фосфита, или сухой бензол. При взаимодействии с *n*-бензохиноном тетраметилэтиленгликольфосфористой и дифенилфосфористой кислот растворителями служили диоксан и диэтиловый эфир. В результате реакции образуются кристаллические вещества, растворимые в водных растворах щелочей, дающие характерную цветную реакцию на фенольный гидроксил с хлорным железом и не показывающие реакций, характерных для карбонильной группы.

При гидролизе полученных веществ фосфорной кислотой (1 : 1) образуется гидрохинон с выходом до 80%. Омыление спиртовой щелочью при 40—50° также приводит к образованию гидрохинона (соответствующего ему фенолята) и фосфорного соединения. Количественное определение содержания гидроксильных групп, путем ацетилирования уксусным ангидридом в присутствии пиридина, показало, что все полученные соединения содержат лишь по одной гидроксильной группе. Для одного соединения, а именно полученного из диметилфосфористой кислоты и *n*-бензохинона, была проведена реакция с фенилизотиоцианатом — выделен соответствующий фенилфосфитан.

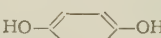
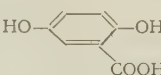
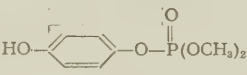
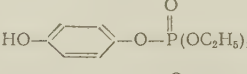
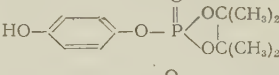
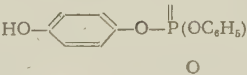
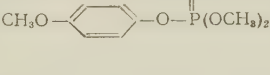
Изучение спектров поглощения соединений в ультрафиолетовой области также подтверждает, что полученные соединения являются эфирами *n*-оксифенилфосфорной кислоты. В самом деле, если бы продукты реакции диалкилфосфитов с хинонами представляли собой эфиры гидрохинонфосфиновой кислоты (I), то в их спектрах следовало бы ожидать смещение максимума поглощения в сторону более длинных волн по сравнению с гидрохиноном, как это имеет место в случае, например, 2,5-диоксибензойной кислоты (¹⁵) или нитрогидрохинона (¹⁶). Если же полученные нами соединения построены по типу эфиров *n*-оксифенилфосфорной кислоты (IV), то следует ожидать смещение максимума в сторону коротких волн, как в случае *O*-ацетильных производных гидрохинона (¹⁷).

Как видно из табл. 2, максимум поглощения продуктов взаимодействия диалкилфосфористых кислот с хинонами смещен в сторону коротких волн совпадает с максимумом поглощения диметил-*n*-метоксифенилфосфата. Последний был нами синтезирован известным методом (¹⁸), и строение его не вызывает сомнения.

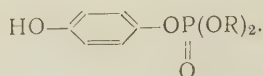
Таким образом, результаты исследования веществ, полученных взаимодействием диалкилфосфористых кислот с *n*-бензохиноном (гидролиз с образованием гидрохинона, отсутствие карбонильных групп, содержание однофенольного гидроксила), показывают, что эти вещества действительно

Таблица 2

У.-ф. спектры поглощения производных гидрохинона

Соединение	$\lambda_{\text{макс}}$, мμ	lg ε
	290	3,4
	320	—
	280	3,7
	280	3,67
	280	3,69
	280	3,66
	280	3,69

являются эфирами фосфорной кислоты, а именно диалкил-*n*-оксифенилфосфатами



Экспериментальная часть

Диметил-*n*-оксифенилфосфат. К раствору 5,5 г (0,05 моля) диметилфосфористой кислоты в 40 мл сухого метилового спирта было добавлено около 1 мл раствора метилата натрия и, после охлаждения полученного раствора до 0°, небольшими порциями 5,4 г (0,05 моля) бензохинона. Реакционная смесь затем нагревалась в течение 1½ часа на водяной бане. По окончании реакции метиловый спирт отгонялся, при этом остаток кристаллизовался. После двух перекристаллизаций из воды было получено 7,3 г (70,7% от теоретического выхода) эфира, т. пл. 74,5—75,5°.

Эфир фенилкарбаминовой кислоты (фенилуретан). Смесь из 2,1 г диметил-*n*-оксифенилфосфата и 4 мл фенилизоцианата нагревалась в течение 10 час. на водяной бане при 75—85°. Образовавшееся белое кристаллическое вещество промывалось петролейным эфиром и дважды перекристаллизовывалось из бензола, т. пл. 120—121°.

Институт нефтехимического синтеза
Академии наук СССР

Поступило
25 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. И. Санин, Е. С. Шепелева и др., Тр. конфер. Химия и применение фосфорорганических соединений, Изд. АН СССР, 1957, стр. 112. ² П. И. Санин, В. В. Шер, ДАН, 107, № 4, 551 (1956). ³ Е. С. Шепелева, П. И. Санин, ДАН, 109, № 3, 555 (1956). ⁴ В. С. Абрамов, ДАН, № 3, 487 (1950). ⁵ В. С. Абрамов, ЖОХ, 22, в. 4, 647 (1952). ⁶ А. Н. Пудовик, Ю. П. Китаев, ЖОХ, 22, 467 (1952). ⁷ А. Н. Пудовик, Г. Заметаева, Изв. АН СССР, ОХН, 1952, 932. ⁸ А. Н. Пудовик, Усп. хим., 23, в. 5, 547 (1954). ⁹ E. C. Ladd, M. P. Harvey, Ам. пат. 2553417, 1951 г.; Chem. Abstr., 45, 6865 (1951). ¹⁰ В. А. Кухтин, К. М. Орехова, ДАН, 124, № 4, 819 (1959). ¹¹ F. Ramirez, S. Dershowitz, J. Org. Chem., 22, № 7, 856 (1957). ¹² F. Ramirez, S. Dershowitz, J. Am. Chem. Soc., 81, № 3, 587 (1959). ¹³ F. Ramirez, E. H. Chen, S. Dershowitz, J. Am. Chem. Soc., 81, № 16, 4338 (1959). ¹⁴ A. Osol, L. J. Kleckner, J. Am. Pharm. Assoc., 41, 306 (1952); Chem. Abstr., 46, 9262 (1952). ¹⁵ E. B. R. Prideaux, G. R. Nunn, J. Chem. Soc., 125, 2110 (1924). ¹⁶ Е. М. Ворошин, Изв. АН СССР, сер. физ., 17, № 6, 717 (1953). ¹⁷ В. В. Катышкина, М. Я. Крафт, ЖОХ, 26, 3060 (1956).

Член-корреспондент АН СССР Р. Х. ФРЕЙДЛИНА, ЦАО И и Е. Ц. ЧУКОВСКАЯ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГИДРИДСИЛАНОВ С АКРИЛОНИТРИЛОМ В ПРИСУТСТВИИ ПЕНТАКАРБОНИЛА ЖЕЛЕЗА И ХЛОРИСТОГО НИКЕЛЯ

Как было показано ранее (1), гидридсиланы взаимодействуют с непредельными соединениями в присутствии пентакарбонила железа с образованием предельных и непредельных соединений по схемам (А) и (Б):



где $R'R''R'''$ — соответственно алкил, хлор, этокси-группа; R = алкил, OC_2H_5 . Преобладание той или иной из этих реакций зависит от природы силана и олефина, а также от условий реакции.

В настоящей работе мы исследовали реакцию между гидридсиланами и акрилонитрилом в присутствии пентакарбонила железа. Начиная с 1956 г. значительное количество работ посвящено реакции гидридсиланов с акрилонитрилом (2-11). В качестве катализаторов реакции применялись органические основания, амиды кислот, платина на угле, платинохлористодородная кислота, никель Рэнея. Перекиси не могут быть использованы в этой реакции, так как вызывают полимеризацию акрилонитрила (3).

Органические основания и амиды кислот катализируют только реакцию трихлорсилана с акрилонитрилом и неактивны в реакции метилдихлорсилана с акрилонитрилом (5-7). В присутствии платиновых катализаторов никеля Рэнея метилдихлорсилан реагирует с акрилонитрилом, однако при этом образуется смесь α - и β -метилдихлорсилилпропионитрилов.

Нодзакура и Конотсуне (2) показали, что под влиянием различных катализаторов цианэтилирование трихлорсилана осуществляется по разным направлениям. Так, в стеклянных трубках в присутствии каталитических количеств пиридина образуется β -трихлорсилилпропионитрил. В этих же условиях в автоклаве образуется α -трихлорсилилпропионитрил. Это связано с образованием в автоклаве тетрапиридинникельхлорида (за счет реакции трихлорсилана с металлической стенкой автоклава). Таким образом, если цианэтилирование трихлорсилана можно направить как в сторону образования β -трихлорсилилпропионитрила, так и α -изомера, то в случае метилдихлорсилана во всех изученных до настоящего времени условиях образуются смеси α - и β -изомеров.

Нами изучено взаимодействие метилдихлорсилана и триэтилсилана с акрилонитрилом. Реакция проводилась в автоклаве из нержавеющей стали или в запаянных стеклянных ампулах при 120—150° в отсутствие добавок или в присутствии пентакарбонила железа, хлористого никеля, смеси обеих добавок; полученные результаты сведены в табл. 1. Как видно из табл. 1, в отсутствие добавок реакция не идет (опыт 6); при добавлении одного хлористого никеля реакция также не имеет места (опыты 7 и 10). Триэтилсилан не реагирует с акрилонитрилом в присутствии пентакарбонила железа в автоклаве (опыт 13). Метилдихлорсилан не реагирует с акрилонитрилом в присутствии пентакарбонила железа в запаянной стеклянной

Таблица 1

№ опыта	Силан	Молярное отношение силана : акрилонитрил	Реакционный сосуд	Добавки	Т-ра, °С	Выход от теор., %
1	$\text{CH}_3\text{SiCl}_2\text{H}$	2 : 1	Автоклав из нержав. стали *	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	0
2	То же	1 : 1	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	12
3	То же	1 : 2	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	39
4	То же	1 : 3	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	46
5	То же	1 : 5	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	42
6	То же	1 : 3	То же	Без добавок	140—150	0
7	То же	1 : 3	То же	NiCl_2 (0,15 г)	140—150	0
8	То же	1 : 3	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл) NiCl_2 (0,15 г) + + $\text{Fe}(\text{CO})_5$ (0,2 г)	120—130	60
9	То же	1 : 3	Запаян. стекл. ампула **		140—150	0
10	То же	1 : 3	То же	NiCl_2 (0,1 г)	140—150	0
11	То же	1 : 3	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (0,2 мл) NiCl_2 (0,1 г)	120—130	56
12	$(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{SiH}$	1 : 3	Автоклав из нержав. стали *	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл) + + NiCl_2 (0,15 г)	120—130	73
13	То же	1 : 3	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	30
14	$\text{CH}_3\text{SiCl}_2\text{H}$ ***	2 : 1	То же	$\text{Fe}(\text{CO})_5$ (1 мл)	140—150	4

* Опыты проведены в полулитровом вращающемся автоклаве с загрузками силана и акрилонитрила 200—300 г, считая на смесь реагентов. Воздух из автоклава вытеснялся азотом, после чего азот вводился в автоклав до давления 30 ат. Продолжительность нагревания во всех опытах 5 час.

** Опыты проведены с загрузками силана 17,2 г и акрилонитрила 24,3 г. Продолжительность нагревания 5 час.

*** Реакция велась в присутствии 150 мл ацетонитрила.

ампуле (опыт 9), но в тех же условиях при проведении опытов в автоклаве имеет место образование аддукта, выход которого увеличивается с увеличением избытка акрилонитрила (опыты 1—5). Эти данные позволили предположить, что реакция осуществляется в условиях, когда кроме карбонила железа в смеси присутствуют следы солей тяжелых металлов, образующихся на стенках автоклава под действием хлорсиланов.

Действительно, при одновременном присутствии небольших количеств пентакарбонила железа и хлорида никеля акрилонитрил присоединяет как метилдихлорсилан, так и триэтилсилан. Реакции текут одинаково хорошо как в автоклаве (опыты 8, 12), так и в запаянных ампулах (опыт 11). Присоединение приводит к α -метилдихлорсиллилпропионитрилу $(\text{CH}_3\text{SiCl}_2\text{CH}(\text{CH}_3)\text{CN})$ в случае метилдихлорсилана и к α -триэтилсиллилпропионитрилу $((\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{SiCH}(\text{CH}_3)\text{CN})$ в случае триэтилсилана. По-видимому, действие найденного нами смешанного катализатора направляет реакцию по ионному механизму. В пользу этого взгляда можно привести следующие доводы: а) реакция идет только в присутствии избытка акрилонитрила (опыты 4—5) или в среде другого полярного растворителя, например ацетонитрила (опыт 14); б) необходимо участие хлористого никеля; в) образование α -изомеров обычно связывают с ионным течением реакции цианэтилирования гидридсиланов ⁽⁹⁾.

Экспериментальная часть

Приводим описание опытов 8 и 12 и доказательства строения полученных аддуктов.

Реакция метилдихлорсилана с акрилонитрилом в присутствии $\text{Fe}(\text{CO})_5$ и NiCl_2 (опыт 8). В полулитровый вращающийся автоклав из нержавеющей стали помещено 115 г (1 моль)

При метилировании избытком реактива Гриньяра кроме продукта (II) получен метилэтилкетон, т. кип. 80—82°, n_D^{20} 1,3885. Литературные данные⁽¹²⁾: т. кип. 79,6°; n_D^{20} 1,38071^(15,9).

Кетон идентифицирован в виде 2,4-динитрофенилгидразона, т. пл. 115° (из спирта). Найдено %: N 23,26; 22,92. Для $C_{10}H_{12}O_4N_4$ вычислено: %: N 22,21. Литературные данные⁽¹²⁾: т. пл. 117°.

Щелочной гидролиз триметилсилилпропионитрила. Вещество (II) кипятилось 7 час. с 45% КОН. В результате получены следующие вещества: $(CH_3)_3Si-O-Si(CH_3)_3$ с т. кип. 99°, n_D^{20} 1,3740; d_4^{20} 0,7656. Найдено MR 48,42; для $C_6H_{18}Si_2O$ вычислено 48,89. Литературные данные⁽¹³⁾: n_D^{20} 1,3792; d_4^{20} 0,7638.

Найдено %: C 44,43; 44,31; H 11,37; 11,51
 $C_6H_{18}Si_2O$. Вычислено %: C 44,38; H 11,17

2. CH_3CH_2COOH с т. кип. 141°, n_D^{20} 1,3871. Литературные данные⁽¹²⁾ т. кип. 141°, n_D^{20} 1,3874. Кислота идентифицирована в виде фенолгидразида, т. пл. 153—155° (из бензола). Найдено %: N 16,68; 16,57. $C_9H_{12}N_2O$ вычислено %: N 17,06. Литературные данные⁽²⁾: т. пл. 155—156°.

Реакция триэтилсилана с акрилонитрилом в присутствии $Fe(CO)_5$ и $NiCl_2$ (опыт 12). Опыт проведен, как в случае метилдихлорсилана. Из 87 г (0,75 моля) триэтилсилана, 132 г (2,5 моля) акрилонитрила, 0,5 мл $Fe(CO)_5$ и 0,2 г $NiCl_2$ получено 92 г (73% от теории) вещества с т. кип. 97—98° при 8 мм. После повторной перегонки n_D^{20} 1,4525; d_4^{20} 0,8634. Найдено MR 52,95; для $C_9H_{19}SiN$ вычислено * 52,88.

Найдено %: C 63,77; 63,49; H 11,38; 11,33; Si 16,83; 16,85
 $C_9H_{19}SiN$. Вычислено %: C 63,85; H 11,31; Si 16,57

При щелочном гидролизе, проведенном аналогично описанному выше, получены гексаэтилдисилоксан и пропионовая кислота.

В и.-к. спектре данного соединения имеется полоса 2205 ± 10 см⁻¹ характерная для α -нитрилов.

Институт элементоорганических соединений
Академии наук СССР

Поступило
20 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Х. Фрейдлина, Е. Ц. Чуковская, Цао И, ДАН, 127, 352 (1959).
² S. Nozakura, S. Konoetsune, Bull. Chem. Soc., Japan, 29, 323, 326 (1956).
³ I. L. Speier, R. Zimmerman, J. Webster, J. Am. Chem. Soc., 78, 227 (1956).
⁴ А. Д. Петров, В. М. Вдовин, Изв. АН СССР, ОХН, 1957, 1490.
⁵ M. Prober, C. D. Coore, Фр. пат. 1116726, РЖХим., 1958, 47712. ⁶ J. C. Saam Пат. США, 2860 153, ноябрь 11, 1958; Chem. Abstr., 53, 9060 (1959). ⁷ J. C. Saam J. L. Speier, J. Org. Chem., 24, 427 (1959). ⁸ L. Goodman, R. M. Silverstein, A. Benitz, J. Am. Chem. Soc., 79, 3073 (1957). ⁹ L. Goodman, R. M. Silverstein, J. N. Shoolery, J. Am. Chem. Soc., 78, 4493 (1956).
¹⁰ А. Д. Петров, В. Ф. Миронов, В. М. Вдовин, С. И. Садых-Зад, Изв. АН СССР, ОХН, 1956, 257. ¹¹ В. М. Вдовин, Диссертация, Инст. орг. хим. АН СССР, 1957. ¹² Handbook of chemistry and physics, 1, изд. 37, стр. 118, 814 (1955-1956). ¹³ К. А. Андрианов, Кремнийорганические соединения, М., 1955, стр. 414.
¹⁴ В. Ф. Миронов, Е. И. Никишин, Изв. АН СССР, ОХН, 1958, 1080.

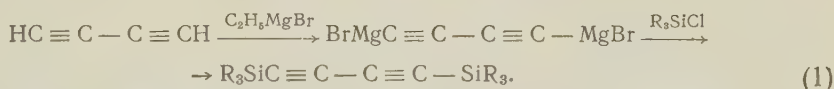
* Расчет велся с применением инкрементов групп, предложенных В. Ф. Мироновым и Г. И. Никишиным⁽¹⁴⁾.

М. Ф. ШОСТАКОВСКИЙ, Е. П. ГРАЧЕВА и Л. А. КАЮТЕНКО

СИНТЕЗ И ПРЕВРАЩЕНИЯ ТРИАЛКИСИЛИЛЭТИНИЛВИНИЛАЛКИЛОВЫХ ЭФИРОВ

(Представлено академиком Б. А. Казанским 8 I 1960)

Синтез на основе диацетиленов открыл широкую возможность получать целый ряд этинилвинилалкиловых эфиров, обладающих большой реакционной способностью. Широко исследованы различные реакции с этинилвинилалкиловыми эфирами в работах Гербертса (1), Франка (2) и других исследователей (3-7), в которых описываются синтез и взаимодействие их со спиртами, кетонами, меркаптанами. Диацетилен и его монозамещенные образуют соответствующие магнийбромпроизводные (8-10), взаимодействие которых с различными карбонильными соединениями и углекислотой описаны в литературе (11). Ранее (12) мы изучали взаимодействие диацетиленов с триалкилсиланхлоридами по схеме:



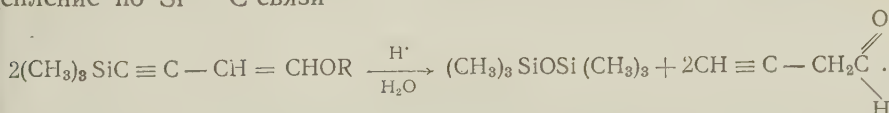
Дорнов и Ише (13, 14) получили магнийбромпроизводное этинилвинилметилового и этинилвинилэтилового эфиров и конденсировали их с диэтиловым эфиром угольной и с этиловым эфиром ортомуравьиной кислот.

Целью настоящего исследования является изучение взаимодействия этинилвинилалкиловых эфиров с триалкилсиланхлоридами. Синтез триалкилсиланхлоридов осуществляли через Mg-органическое производное, полученное не в растворе тетрагидрофурана, как у Дорнова и Ише, а в серном эфире

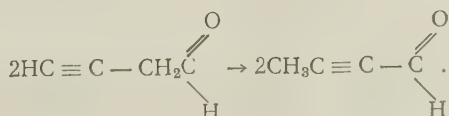


Реакции (2) и (3) протекают в очень мягких условиях.

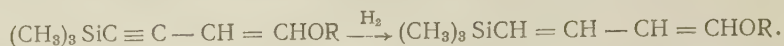
Полученные триалкилсиланхлориды по химическим свойствам напоминают этинилвинилалкиловые эфиры, не содержащие кремния (они также легко гидролизуются 2% H_2SO_4), но имеют и свои особенности. Гидролиз, проведенный с целью доказательства строения триалкилсиланхлоридов, показал, что при этом идет расщепление по Si — C-связи



Образующийся в результате реакции бутин-1-аль-4 изомеризуется в тетровый альдегид:

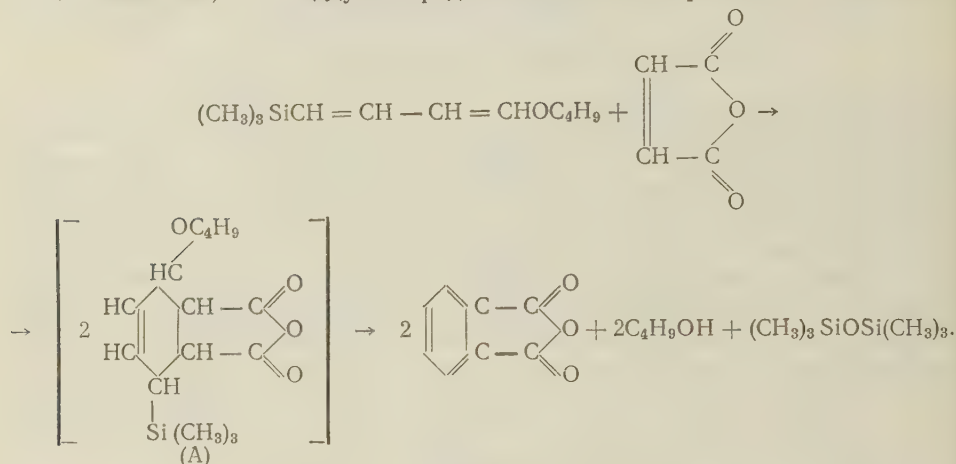


В отличие от этинилвинилалкиловых эфиров, не содержащих кремний, триалкилсилилэтинилвинилалкиловые эфиры не гидрируются над $\text{PtO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ или над Pd, осажденным на сернокислом кальции ⁽¹⁵⁾, а гидрируются лишь над смесью 2% Pd/CaCO₃ и 5% Pt/C. Ступенчатым гидрированием получен триметилсилил-бутоксн-4-бутадиен-1,3



При конденсации последнего с малеиновым ангидридом образуется аддукт (A) с последующим отщеплением ⁽¹⁶⁾ бутилового спирта и триметилсиланола, который в условиях реакции дает гексаметилдисилоксан.

Установлено, что аддукт представляет собой фталевый ангидрид.



Кремнийсодержащий этинилвинилбутиловый эфир при нагревании с бутанолом без катализатора, а также в присутствии 1—2% щелочного или кислого катализатора не дает ацеталь триметилсилилбути-1-аля-4.

Экспериментальная часть

Синтез этинилвинилбутилового эфира. В круглодонную колбочку, снабженную мешалкой и обратным холодильником, поместили 2% спиртовой раствор КОН. Систему продували сухим азотом, после чего пропускали в реакционную смесь, нагретую до 70—75°, диацетилден с током азота. После окончания реакции смесь промывали 3—4 раза водой, сушили прокаленным поташом и перегоняли в вакууме. Характеристика полученных этинилвиниловых и триалкилсилилэтинилвинилбутиловых эфиров дана в табл. 1.

Таблица 1

Название эфира	Т-ра кип., °C/мм	n_D^{20}	d_4^{20}	MR_D		Найдено, %			Вычислено, %		
				найде- но	вычислено						
Этинилвинилбутиловый эфир *	61,5°/12	1,4712	0,8664	40,04	38,16	77,1	9,70	—	77,36	9,85	—
Триметилсилилэтинилвинилбутиловый эфир	110—112°/15	1,4695	0,8589	63,73	63,68	67,05	10,23	14,12	67,28	10,27	14,30
Триэтилсилилэтинилвинилбутиловый эфир	105—106°/7	1,4895	0,8886	77,10	77,57	70,40	10,90	11,82	70,52	11,01	11,78

* Кроме эфира выделен ацеталь.

Синтез триметилсилилэтинилвинилбутилового эфира. $(\text{CH}_3)_3\text{SiC} \equiv \text{C} - \text{CH} = \text{CHOC}_4\text{H}_9$. В трехгорлой колбе

мешалкой, снабженной холодильником, капельной воронкой и термометром, получили этилмагнийбромид из 2,9 г магния и 13,1 г C_2H_5Br . охлажденному до -10° этилмагнийбромиду прикапывали при комнатной температуре и перемешивании 14,5 г этинилвинилбутилового эфира. смесь перемешивали при 20° 4—5 час. и затем прибавили по каплям 13 г метилсиланхлорида. Через час реакционную смесь оставили на ночь, на следующий день реакционную смесь перемешивали еще 3 часа, затем адок отфильтровали и фильтрат перегнали в токе азота. При перегонке выделены фракции: I) $24-38^\circ/14$ мм; II) $110-112^\circ/15$ мм.

Фракция I представляет собой не вошедший в реакцию триметилсиланторид, слегка загрязненный полученным триметилсилилэтинилвинилбутиловым эфиром.

Фракция II—13,6 г (выход 50,7%) триметилсилилэтинилвинилбутиловый эфир, т. кип. $110-112^\circ/15$ мм, n_D^{20} 1,4695; d_4^{20} 0,8589. MR_D найдено 63,73; вычислено * 63,68.

Найдено %: C 67,05; H 10,23; Si 14,12
 $C_{11}H_{20}OSi$. Вычислено %: C 67,28; H 10,27; Si 14,30

В аналогичных условиях синтезировали триэтилсилилэтинилвинилбутиловый эфир с выходом 52,3%, т. кип. $105-106^\circ/7$ мм, n_D^{20} 1,4895; d_4^{20} 0,8886, MR_D найдено 77,16, вычислено 77,57.

Найдено %: C 70,40; H 10,90; Si 11,82
 $C_{14}H_{26}OSi$. Вычислено %: C 70,52; H 11,01; Si 11,78

Гидролиз триметилсилилэтинилвинилбутилового эфира. а) В колбу, емкостью 200 мл, с 25 мл 2% H_2SO_4 , 5 мл $NaHSO_3$ поместили тонкостенную ампулу с навеской 0,1—0,2 г эфира. В закрытой колбе сильным встряхиванием разбили находящуюся внутри ампулку с эфиром и оставили реакционную смесь на 30 мин. Неореагировавший с альдегидом $NaHSO_3$ оттитровали 0,1 N раствором да. Гидролиз прошел на 74%. Триэтилсилилэтинилвинилбутиловый эфир гидролизуется в вышеописанных условиях на 79,5%.

б) 3 г триметилсилилэтинилвинилбутилового эфира, 10 мл 2% H_2SO_4 перемешивали при нагревании до 50° 1 час в колбочке, снабженной обратным холодильником, мешалкой и термометром. К реакционной смеси в растворе этанола прибавили свежеприготовленный раствор, 2,4-динитрофенилгидразина. Смесь оставили на ночь. Затем отфильтровали полученный 2,4-динитрофенилгидразон и перекристаллизовали его из этилового спирта. Получили 2,4-динитрофенилгидразон тетрального альдегида с т. пл. 135° . Литературные данные⁽¹⁷⁾: т. плав. 136° для 2,4-динитрофенилгидразона тетрального альдегида. Проба смешения депрессии температуры плавления не дала.

Аналитические данные гидразона:

Найдено %: C 48,25; 48,17; H 3,32; 3,25; N 22,36; 22,62
 $C_{10}H_8N_4O_4$. Вычислено %: C 48,39; H 3,24; N 22,57

Ступенчатое гидрирование триметилсилилэтинилвинилбутилового эфира. В «утку» для гидрирования поместили 4 г эфира в метаноле и смесь катализаторов 2% $Pd/CaCO_3$ 5% Pt/C . Вытеснили воздух водородом, и началось гидрирование. После поглощения 540 мл водорода (22° , 743 мм) гидрирование прервали. теоретически в этих условиях должно поглотиться 510 мл водорода. Катализатор отфильтровали, метанол отогнали и полученный продукт подвергли разгонке в токе азота. Выделен продукт т. кип. $88-89^\circ/7$ мм, n_D^{20} 1,4580; d_4^{20} 0,8532. MR_D найдено 63,45, вычислено 63,52. Выход % (2,28 г).

* Молекулярная рефракция вычислена с учетом групповой рефракции $-C\equiv C-C=C$, равной 3,8.

Конденсация $(\text{CH}_3)_3\text{SiCH}=\text{CH}-\text{CH}=\text{CHOC}_4\text{H}_9$ с малеиновым ангидридом. 1,5 г триметилсилил-1-бутокс-4-бутадиен-1,3 (т. кип. $88-89^\circ/7$ мм, n_D^{20} 1,4580) поместили в колбу, снабженную обратным холодильником и термометром, прилили раствор 2 г малеинового ангидрида в 50 мл бензола. Разогревания не наблюдали. Смесь нагревали на водяной бане в течение 1 часа, затем отогнали бензол, а остаток перегнали. Выделены фракции: I) $96-99^\circ/25$ мм, II) $156-162^\circ/25$ мм.

Фракция I — не вошедший в реакцию малеиновый ангидрид. После перекристаллизации фракции II из петролейного эфира получили 0,27 аддукта (выход 25,7%), т. пл. 130° . Проба смешения полученного аддукта с фталевым ангидридом депрессии температуры плавления не имела.

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского
Академии наук СССР

Поступило
24 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Th. Herberts, Ber., 25, 475 (1952). ² W. Franke, K. Kratt et al. Ber., 86, 793 (1953). ³ W. Franke, K. Sceman, Пат. ФРГ 871006, 1953; Герм. пат. 601822, 1952. ⁴ A. Aepfahn, R. Stadler, 1, Zbl., 2255 (1935); W. G. Young, Zbl., 7844 (1954). ⁵ М. Ф. Шостаковский, А. В. Богданова, Г. К. Красильникова, ДАН, 114, 1250 (1957). ⁶ М. Ф. Шостаковский, А. В. Богданова, Г. И. Плотникова, ДАН, 120, 301 (1958). ⁷ A. Dornow, F. Ische, Angew. Chem., 67, 653 (1955). ⁸ H. H. Schlubach, V. Fransen, Lieb. Ann., 572, 116 (1951). ⁹ L. B. Armitage, N. Entwistle et al. J. Chem. Soc., 1954, 147. ¹⁰ M. Nakagama, J. Japan. Chem., 4, 564 (1950); Proc. Japan. Acad., 26, 38 (1950). ¹¹ F. Straus, L. Kollek, W. Heun, Ber., 63, 13, 1868, 1886 (1930). ¹² М. Ф. Шостаковский, И. А. Шихиев, Л. А. Каютенко, Докл. АН АзербССР, 15, 21 (1959). ¹³ A. Dornow, F. Ische, Ber., 89, 870, 876 (1956). ¹⁴ A. Dornow, F. Ische, Angew. Chemie, 67, 305 (1955). ¹⁵ М. Ф. Шостаковский, А. В. Богданова, Г. К. Красильникова, Авт. свид. № 117659, 29 IV 1958. ¹⁶ W. Fleig, Lieb. Ann., 568, 1 (1950). ¹⁷ J. Lunt, F. Sondheimer, J. Chem. Soc., 1950, 3365.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Ю. М. БАКШИ, А. И. ГЕЛЬБШТЕЙН и М. И. ТЕМКИН

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО РАВНОВЕСИЮ СИНТЕЗА
ЭТИЛОВОГО СПИРТА

(Представлено академиком С. С. Медведевым 30 XII 1959)

Опубликованные ранее ⁽¹⁾ данные по равновесию



при давлениях до 81 ат показывают линейную зависимость $\log K_P$ от общего давления P . Эта зависимость при постоянном отношении $n_{\text{H}_2\text{O}}/N_{\text{C}_2\text{H}_4}$ отвечает уравнению состояния газовой смеси со вторым виальным коэффициентом. Величины $\log K_f$, полученные линейной экстраполяцией $\log K_P$ к $P = 0$, были представлены уравнением ⁽¹⁾

$$\log K_f = \frac{2093}{T} - 6,304. \quad (2)$$

Дополнительные измерения, результаты которых сообщаются здесь, дают возможность судить о зависимости отношения $\log K_\gamma/P$ от состава смеси и уточнить зависимость этого отношения от температуры ($K_\gamma = \gamma_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}}/\gamma_{\text{C}_2\text{H}_4} \gamma_{\text{H}_2\text{O}}$, где $\gamma_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}}$ — коэффициент активности $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ и т. д.). Методика измерений не отличалась от описанной ⁽¹⁾. Использовались составы газовой смеси, при которых исключалась конденсация. Результаты представлены в табл. 1, где даны также значения K_P , вычисленные при помощи уравнения (2), принимая для 286° , согласно ⁽¹⁾, $\log K_\gamma/P = 14,2 \cdot 10^{-4}$ и для 332° $K_\gamma = 1$. Как видно из табл. 1, вели-

Таблица 1

Давление, ат	Объемн. скорость по C_2H_4 , час ⁻¹ *	$\frac{N_{\text{H}_2\text{O}}}{N_{\text{C}_2\text{H}_4}}$	Состав исходной смеси, молярные доли			Состав отходящей смеси, молярные доли			$K_P \cdot 10^3$ ат ⁻¹	$K_P \cdot 10^3$ по ур-нию (2), ат ⁻¹
			C_2H_4	H_2O	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	C_2H_4	H_2O	$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$		
36	3160 (40)	0,16	0,863	0,137	—	0,840	0,146	0,0102	2,32	} 2,34 при $N_{\text{H}_2\text{O}}/N_{\text{C}_2\text{H}_4} = 0,51$
36	3160 (40)		0,848	0,139	0,0124	0,838	0,146	0,0104	2,36	
71	577 (40)	1,3	0,450	0,650	—	0,434	0,526	0,0345	2,13	} 2,08 при $N_{\text{H}_2\text{O}}/N_{\text{C}_2\text{H}_4} = 0,51$
71	577 (40)		0,464	0,521	0,0154	0,463	0,496	0,0351	2,16	
41	1300 (12)	0,35	0,739	0,261	—	0,735	0,250	0,0110	1,46	} 1,43 при $N_{\text{H}_2\text{O}}/N_{\text{C}_2\text{H}_4} \approx 1,8$
41	2180 (12)		0,730	0,256	0,0149	0,728	0,253	0,0108	1,40	
51	1310 (12)	0,66	0,601	0,399	—	0,590	0,388	0,0164	1,41	
61	1270 (12)		0,511	0,489	—	0,497	0,477	0,0200	1,38	
71	1260 (12)	1,2	0,445	0,555	—	0,411	0,561	0,0224	1,37	
81	1200 (12)		0,400	0,600	—	0,363	0,606	0,0255	1,43	
81	466 (40)	1,5	0,373	0,593	0,0347	0,370	0,600	0,0255	1,42	

* В скобках указано содержание H_3PO_4 в процентах от веса катализатора.

ны K_P при данном P в пределах точности измерений не зависят от состава газовой смеси. Кроме того, из таблицы видно, что при 332° K_P

не зависит от P , т. е. эта температура близка к «температуре Гульдберга — Вааге» ⁽¹⁾. При более низких температурах $K_Y > 1$ *. В таблице не приведены данные о содержании эфира, так как равновесие по отношению к реакции образования эфира не достигалось.

Как было показано ⁽¹⁾,

$$\frac{\ln K_Y}{P} = \frac{2\sum_i \nu_i B_i - B\sum_i \nu_i}{RT} \quad (3)$$

Зависимость величин B_i и B от T может быть передана рядами вида $a_0 + \frac{a_1}{T} + \frac{a_2}{T^2} + \dots$. Предполагая, что достаточно двух членов ряда, приходим к зависимости $\log K_Y/P$ от температуры вида

$$\frac{\log K_Y}{P} = \frac{A_0}{T} + \frac{A_1}{T^2} \quad (4)$$

Опытные данные отвечают значениям $A_0 = -10,47$; $A_1 = 6,37 \cdot 10^3$. Уравнение (2) на основании равенства $K_P = K_f/K_Y$, дает

$$\log K_P = \frac{2093}{T} - 6,304 + \left(\frac{10,47}{T} - \frac{6,37 \cdot 10^3}{T^2} \right) P \quad (5)$$

Уравнение (5) описывает зависимость K_P от T и P и учитывает независимость K_P от состава смеси. В табл. 2 значения K_P по уравнению (5)

Таблица 2

Т-ра, °С	Давление, ат*	$K_P \cdot 10^3$ опытн., ат ⁻¹	$K_P \cdot 10^3$ по ур-нию (5), ат ⁻¹	Т-ра, °С	Давление, ат	$K_P \cdot 10^3$ опытн., ат ⁻¹	$K_P \cdot 10^3$ по ур-нию (5), ат ⁻¹
258	41	3,30	3,31	318	41	1,65	1,64
258	81	2,52	2,54	318	81	1,63	1,57
286	41	2,30	2,35	345	41	1,18	1,24
286	51	2,25	2,26	345	81	1,17	1,27
286	71	2,08	2,10	365	41	0,94	1,02
286	81	2,03	2,02				

*Примечание. В сообщении ⁽¹⁾ была допущена неточность при указании единицы давления. Давления измерялись в технических атмосферах (кг/см²).

сопоставлены с опытными значениями K_P , полученными ранее ⁽¹⁾. Табл. 3 и 4 содержат равновесные степени превращения этилена α , рассчитанные

Таблица 3

Равновесные степени превращения этилена в спирт $\alpha \cdot 10^2$ при $N_{H_2O}/N_{C_2H_4} = 1$

Т-ра, °С	Давление P , ат					
	1	20	40	60	80	100
250	0,253	4,14	6,85	8,64	9,78	10,5
270	0,184	3,10	5,40	7,11	8,40	9,35
290	0,130	2,36	4,28	5,85	7,15	8,24
310	0,0985	1,86	3,50	4,95	6,27	7,40
330	0,0746	1,45	2,83	4,15	5,40	6,74

Таблица 4

Равновесные степени превращения этилена в спирт $\alpha \cdot 10^2$ при 290°

$N_{H_2O}/N_{C_2H_4}$ в исходн. смеси	Давление P , ат					
	1	20	40	60	80	100
0,4	0,0740	1,33	2,43	3,31	4,05	4,65
0,6	0,0972	1,75	3,20	4,37	5,34	6,25
0,8	0,115	2,09	3,79	5,20	6,36	7,29
1,0	0,130	2,36	4,28	5,85	7,15	8,24
2,0	0,173	3,14	5,68	7,78	9,51	10,9

по уравнению (5) в предположении, что протекает только реакция (1). Для вычисления α удобно пользоваться рядом

$$\alpha = \frac{n}{1+n} \frac{K_N}{1+K_N} + \frac{n^2}{(1+n)^3} \left(\frac{K_N}{1+K_N} \right)^2 + 2 \frac{n^3}{(1+n)^5} \left(\frac{K_N}{1+K_N} \right)^3 + \dots, \quad (6)$$

* Соответствующая формулировка в ⁽¹⁾ содержит опечатки.

е n — число молей H_2O на 1 моль C_2H_4 в исходной смеси, $K_N = PK_P$.
 равновесная газовая смесь при $N_{H_2O}/N_{C_2H_4} = 1$, 250° и 100 ат (а также,
 возможно, и некоторые другие) неустойчива по отношению к конденсации.
 Полученные данные позволяют определить тепловой эффект реакции
). Так как K_γ в рассматриваемом случае не зависит от состава газо-
 й смеси, то

$$\left(\frac{\partial \ln K_\gamma}{\partial T}\right)_P = \frac{\Delta H^0 - \Delta H}{RT^2}. \quad (7)$$

Из соотношения

$$\frac{d \ln K_f}{dT} = \frac{\Delta H^0}{RT^2} \quad (8)$$

равенства $K_P = K_f/K_\gamma$ получаем

$$\left(\frac{\partial \ln K_P}{\partial T}\right)_P = \frac{\Delta H}{RT^2}. \quad (9)$$

Уравнение (5) дает

$$\Delta H = -9570 - \left(47,9 - \frac{5,83 \cdot 10^4}{T}\right) P. \quad (10)$$

При 300° и 80 ат $\Delta H = -5263$ кал. Эта величина существенно
 отличается от $\Delta H^0 = -9570$ кал. Следовательно, в технологических
 расчетах надо учитывать зависимость ΔH от P .

Физико-химический институт
 им. Л. Я. Карпова

Поступило
 30 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. М. Бакши, А. И. Гельбштейн, М. И. Темкин, ДАН, 126, 314
 (1959).

Академик АН БССР Н. Н. СИРОТА, Н. М. ОЛЕХНОВИЧ и А. У. ШЕЛЕГ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ В КРИСТАЛЛАХ

В работах Брегга ⁽¹⁾ впервые была показана возможность применения рядов Фурье для целей рентгеноструктурного анализа. Дальнейшее развитие этого метода ^(2, 3) позволило поставить проблему распределения электронной плотности между атомами твердых тел по экспериментально определяемым интенсивностям дифракционных максимумов на рентгенограммах. Вопрос о распределении электронной плотности в кристаллах, определяющей характер, анизотропию и энергию межатомного взаимодействия, относится к наиболее общим проблемам физики и химии твердых тел.

Определению распределения электронной плотности в твердых телах были посвящены многочисленные работы ⁽⁴⁻¹⁶⁾, а также упомянутые в ⁽¹⁶⁾.

Для определения распределения электронной плотности и нахождения электронной плотности $\rho(x, y, z)$ в произвольной точке с координатами x, y, z элементарной ячейки объема v необходимо суммировать трехмерный ряд Фурье.

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{v} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(hkl) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} + \frac{lz}{c} \right) \right], \quad (1)$$

где $F(hkl)$ — структурная амплитуда. Число членов ряда ограничивается числом экспериментально определяемых рефлексов.

Возникающая неопределенность, обусловленная обрывом ряда, не позволяет получить сколько-нибудь ясного представления о действительном распределении электронов в кристаллической решетке. Поэтому в ряде работ были предложены способы устранения эффекта обрыва ряда путем теоретической экстраполяции f -кривой до больших значений суммы квадратов индексов ⁽⁴⁾ или путем введения температурного множителя e^{-2M} со значительными расчетными температурами порядка 1000—10000° К ^(5, 6, 8, 9). Как первый, так и второй способ вносит значительную ошибку в результаты подсчета распределения электронной плотности.

Применение метода, предложенного Хоземаном и Бахом ⁽⁷⁾ для определения электронной плотности с использованием операций «свертки» и экстраполяций f -кривой создает новую возможность. Этот метод также не лишен известных недостатков.

Как указывает Новаки ⁽¹⁸⁾, Рейджем для подсчета электронной плотности аппроксимировал f -кривую атомно рассеивающего фактора функцией Гаусса. При этом подсчет электронной плотности сводился к вычислению интеграла Фурье и суммированию ряда.

В настоящей работе показана возможность подсчитать электронную плотность суммированием трехмерных рядов Фурье, не вводя температурного множителя и не продолжая экстраполяцией f -кривую, а используя лишь значения атомного рассеивающего фактора, которые могут быть получены на $\text{CuK}\alpha$ и менее жестких излучениях.

Как известно (¹⁷), внешние электроны атома вносят изменения в ход дифракции главным образом при малых порядках отражения. При высоких порядках отражения их вклад становится весьма малым. Поэтому величина атомного рассеивающего фактора может быть разделена на две части, обусловленные двумя группами электронов с различным распределением плотностей $\rho_1(\mathbf{r})$ и $\rho_2(\mathbf{r})$, где $\rho_1(\mathbf{r})$ — основная часть электронной плотности, обусловленная электронами, расположенными преимущественно вблизи ядра каждого атома, и $\rho_2(\mathbf{r})$ — оставшаяся часть электронной плотности, обусловленная электронами, расположенными преимущественно во внешней части атомов. При этом указанное разделение ρ_1 и ρ_2 не связано с какими-либо электронными слоями. Обе функции заданы во всем пространстве.

Распределение электронов в первой части достаточным приближением может быть описано функцией распределения Гаусса в виде

$$\rho_1(r) = Ae^{-\alpha r^2}, \quad (2)$$

от которой легко вывести кривую рассеивающего фактора в зависимости от порядка отражения

$$f_1 = \int_0^\infty Ae^{-\alpha r^2} 4\pi r^2 \frac{\sin \mu r}{\mu r} dr = A \frac{\pi^{3/2}}{\alpha^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mu^2}{4\alpha} \right], \quad (3)$$

где $\mu = 4\pi \sin \vartheta / \lambda$.

Величины α и A определяются по двум линиям (h_1, k_1, l_1) и (h_2, k_2, l_2) интенсивностями I_1 и I_2 при $h^2 + k^2 + l^2 > 27$:

$$\alpha = \pi^2 \left(\frac{h_1^2 - h_2^2}{a^2} + \frac{k_1^2 - k_2^2}{b^2} + \frac{l_1^2 - l_2^2}{c^2} \right) \frac{1}{\ln \frac{I_1 C_1}{I_2 C_2}}, \quad (4)$$

$$A = \frac{\sqrt{C_1 I_1}}{(\pi / \alpha)^{3/2}} \exp \left[\frac{\pi^2}{\alpha} \left(\frac{h_1^2}{a^2} + \frac{k_1^2}{b^2} + \frac{l_1^2}{c^2} \right) \right], \quad (5)$$

где C_1 и C_2 — произведения экспериментально учитываемых факторов. Как мы отметили выше, f -кривая первой части электронов $f_1(hkl)$ при больших значениях индексов должна слиться с экспериментально

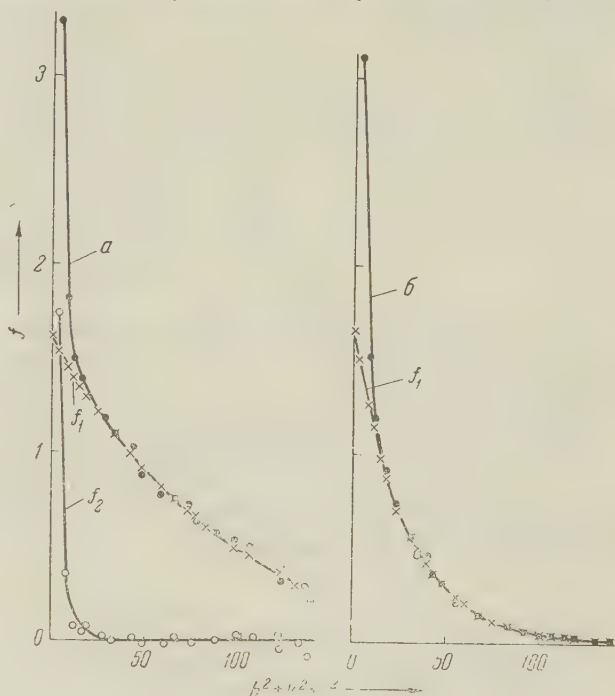


Рис. 1. Изменение атомного рассеивающего фактора f в зависимости от суммы квадратов индексов рефлексов дифракционных максимумов. a — экспериментальная f -кривая алмаза ($^{\circ}$); f_1 — вычисленная f -кривая для электронов с заданным распределением плотности; b — экспериментальная f -кривая с введенным температурным множителем с расчетной температурой 7500° ; f_2 — разность атомно рассеивающих факторов, экспериментально определенных и расчетных для электронов с заданным распределением электронной плотности

получаемой f -кривой. При $h^2 + k^2 + l^2 = 0$ ($\mu = 0$) значение $f_1(0, 0, 0)$ равно числу электронов в первой части.

На рис. 1 показано, что в случае алмаза слияние f_1 -кривой первой части электронов и экспериментально определенной f -кривой в пределах точности эксперимента имеет место уже начиная с суммы квадратов $h^2 + k^2 + l^2 = 27$.

Кривая f_2 рис. 1 представляет разность $f - f_1 = f_2$, обусловленную электронами второй части с неизвестным распределением ρ_2 .

Электронная плотность в любой точке кристалла $\rho(\mathbf{r})$ может быть представлена в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r}) + \rho_2(\mathbf{r}) = \sum_j \rho_j \exp[-\alpha_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0j})^2] + \frac{1}{v} \sum_h \sum_k \sum_l F_2 \exp[-2\pi i \mathbf{r} \mathbf{H}]. \quad (6)$$

$\rho_1(\mathbf{r})$ — заданная плотность, обусловленная суммированием плотности ρ_1 по всем атомам решетки, ρ_2 искомая разность плотностей действительной и заданной.

Фактически расчет распределения электронной плотности сводится к суммированию ряда $\frac{1}{v} \sum_h \sum_k \sum_l F_2 \exp(-2\pi i \mathbf{r} \mathbf{H})$.

На рис. 2 показано вычисленное распределение электронной плотности в направлении $[111]$ алмаза.

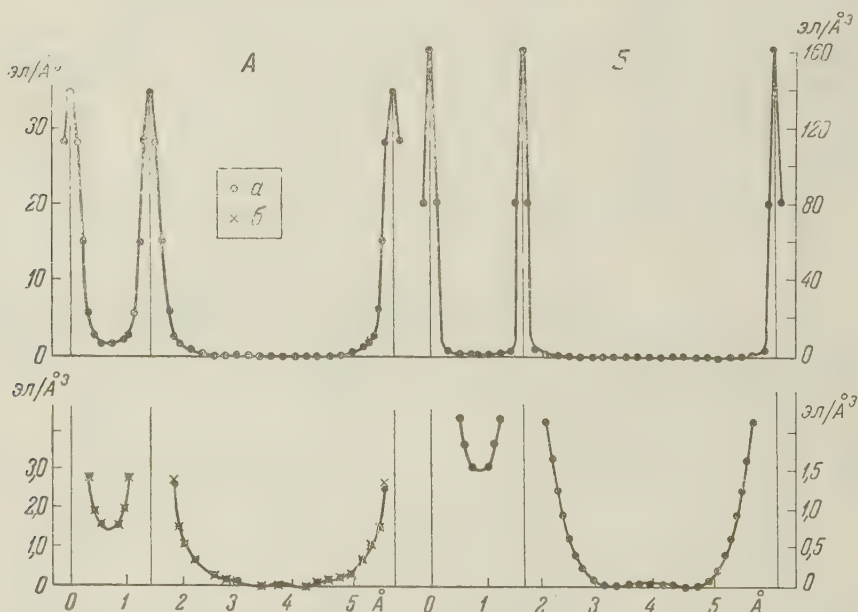


Рис. 2. Вычисленные значения электронной плотности в решетке алмаза в направлении $[111]$. А — при расчетной температуре (7500° К). а — обычный метод суммирования ряда (1), б — по предлагаемому методу. Б — при 20° С, подсчитанные по новому методу без введения температурного множителя

Согласно приведенным данным радиус иона углерода в алмазе равен 0,20—0,25 Å и степень ионизации соответствует $C + 4,0$.

В промежутках между координатами $1/2, 1/2, 1/2$ и $3/4, 3/4, 3/4$ электронная плотность близка к нулю в пределах точности экспериментальных данных. В промежутке от 0,0,0 до $1/4, 1/4, 1/4$ минимум электронной плотности соответствует 1,53 эл/Å³; это значение приблизительно в 5 раз выше, чем у кремния в этом же положении, что, по-видимому, обусловлено характером и энергией межатомной связи.

Действительное распределение электронов вблизи ядра несколько отличается от заданного за счет добавки, подсчитываемой по разности экспериментального и заданного атомно рассеивающих факторов. В промежутках между атомами величина заданной плотности ничтожно мала, и действительная электронная плотность практически совпадает с ρ_2 .

На рис. 3 приведены кривые изменения подсчитанной электронной плотности в точках $0,0,0$; $1/8, 1/8, 1/8$ и $1/2, 1/2, 1/2$ в зависимости от расчетной температуры. Как видно из приведенного графика, введение температурного множителя весьма сильно влияет на получаемые значения электрон-

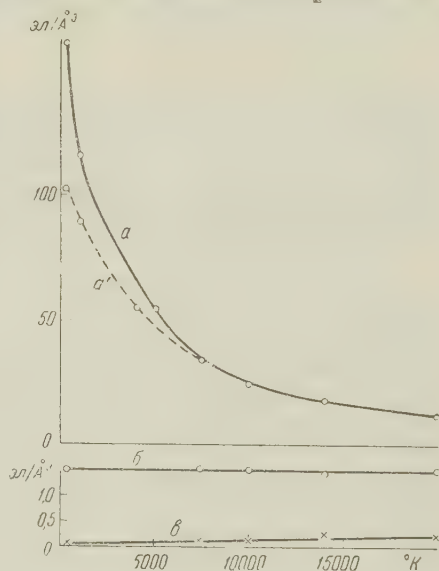


рис. 3. Изменение подсчитанных значений электронной плотности в зависимости от расчетной температуры. a — в точке $0, 0, 0$, вычисленные по новому методу; b — в точке $1/8, 1/8, 1/8$; c — в точке $1/2, 1/2, 1/2$; a' — в точке $0, 0, 0$, вычисленные обычным методом

ной плотности в точке $0,0,0$ и в меньшей мере в точках $1/8, 1/8, 1/8$ и $1/2, 1/2, 1/2$. Заметим при этом, что экстраполировать кривые, полученные путем введения температурных множителей, до комнатной температуры не представляется возможным.

Изложенный метод открывает новые возможности в определении электронной плотности и в решении проблемы химической связи в твердых телах.

Отдел физики твердого тела и полупроводников
Академии наук БССР

Поступило
5 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. H. Bragg, Phil. Trans. Roy. Soc., **215**, 253 (1915).
- ² P. Epstein, S. Ehrenfest, Proc. Nat. Acad. Sci., **10**, 133 (1924).
- ³ W. Duane, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **11**, 489 (1925).
- ⁴ D. K. Froman, Phys. Rev., **36**, 1339 (1930).
- ⁵ R. Brill, H. G. Grimm et al., Naturwiss., **26**, 479 (1938).
- ⁶ R. Brill, H. G. Grimm et al., Ann. Phys., **34**, 393 (1939).
- ⁷ R. Hosemann, S. N. Bagchi, Nature, **171**, 785 (1953).
- ⁸ Н. В. Агеев, Д. Л. Агеева, Изв. АН СССР, ОХН, **5**, 470 (1948).
- ⁹ А. J. Snow, Acta Cryst., **4**, 481 (1951).
- ¹⁰ А. Х. Брегер, Г. С. Жданов, ДАН, **28**, № 1, 630 (1940).
- ¹¹ Ю. Н. Шувалов, ЖТФ, **26**, 9, 1870 (1956).
- ¹² А. J. Snow, Acta Cryst., **4**, 481 (1951).
- ¹³ Ю. Н. Шувалов, ЖТФ, **26**, 9, 1870 (1956).
- ¹⁴ Ю. Н. Шувалов, Изв. АН СССР, ОХН, **5**, 470 (1948).
- ¹⁵ W. Cochran, Rev. Mod. Phys., **30**, 47 (1958).
- ¹⁶ Н. Н. Сирота, Н. М. Олехнович, А. У. Шелер, Докл. АН БССР (1960).
- ¹⁷ Р. Д. Джеймс, Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей, 1950.
- ¹⁸ W. Nowacki, Fouriersynthese von Kristallen, 1952.

Г. И. ФУКС

О МЕХАНИЗМАХ ДЕЙСТВИЯ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОЛИТОВ НА СВЯЗЬ ЧАСТИЦ В КОАГУЛЯЦИОННОЙ СТРУКТУРЕ

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 8 XII 1959)

Развитие учения о коагуляционном структурообразовании расширило представление о коагуляционном взаимодействии частиц дисперсных систем. Если в прошлом такой тип взаимодействия считался характерным только для разбавленных коллоидных растворов, то сейчас известно, что он играет весьма существенную роль и в формировании свойств концентрированных и полидисперсных суспензий, паст и осадков ^(1,2). Соответственно расширился вопрос о механизме действия электролитов на коагуляционную связь частиц. В настоящей работе для исследования влияния электролитов на элементарный акт взаимодействия частиц было использовано размерное моделирование ⁽³⁾ — измерялись толщина и сопротивление утоньшению граничных слоев растворов электролитов в зазоре между зеркально-полированными плоско-параллельными круглыми кварцевыми дисками, погруженными в эти растворы по методике ⁽⁴⁾, и трение сферических поверхностей отрицательно заряженного кварца и положительно заряженного рубина в тех же растворах по методике ⁽⁵⁾. В приборе с дисками расстояние между поверхностями поддавалось измерению в пределах от 3—5 до 0,02 μ (ошибка опыта $\pm 0,01 \mu$), контактное давление от 0,04 до 10 кг/см^2 ; в трибометре реализуется непосредственный контакт сопряженных поверхностей с контактным давлением от 50 до 550 кг/мм^2 .

Из работ ^(3,6) следует, что электролиты повышают кинетическое сопротивление тонких слоев воды сближению дисков и придают этим слоям статическое (равновесное и неравновесное) сопротивление, приводящее к сохранению в зазоре между кварцевыми дисками остаточного (невыжимающегося) слоя раствора (толщина $h_{\text{мин}}$). Влияние электролитов на кинетическое сопротивление сближению частиц, по-видимому, не достигает большой величины, так как граничная вязкость в периферической части граничного слоя повышается ионами от более чем в 5 раз ⁽³⁾, и переход к остаточному слою резкий.

Таблица 1

Кинетическая связь плоско-параллельных кварцевых дисков (диаметр 12 мм) в растворах электролитов после контакта в течение 30 мин. при нагрузке 4 кг/см^2 (усилие отрыва 0,08 кг/см^2)

Электролиты	Концентрация раствора, мг-экв/л	Время отлипания, сек.	Электролиты	Концентрация раствора, мг-экв/л	Время отлипания, сек.
LiCl	10	2,9	MgCl ₂	10	14,7
NaCl	1	3,7	CaCl ₂	10	15,5
NaCl	10	4,3	BaCl ₂	5	30,0
NaCl	1000	9,3	BaCl ₂	10	34,0
KCl	10	13,0	AlCl ₃	10	43,0
RbCl	10	14,1	Th (NO ₃) ₄	10	45,4

С другой стороны, кинетическая связь ⁽³⁾ плоских частиц, выраженная временем их отлипания, существенно зависит от состава окружающего их раствора (табл. 1). Известное влияние на этот эффект оказывает граничная вязкость, но более важно, что состав раствора определяет толщину остаточного слоя (табл. 2), а следовательно, и зазор между поверхностями, устанавливающийся при заданном, не слишком большом, контактном давлении. Заметим, что кинетическая связь зависит не только от расстояния между поверхностями, но и от формы зазора, поэтому влияние электролитов на время отлипания выпуклых частиц должно быть существенно меньшим, чем плоских.

Толщина остаточного слоя определяется концентрацией раствора (рис. 1), числом зарядов противоионов и их радиусом (табл. 2). С повышением контактного давления и, соответственно, уменьшением расстояния между поверхностями боль радиуса ионов уменьшается, а при высоких концентрациях раствора уменьшается и влияние числа зарядов ионов. Кривые $h_{\min} = f(C)$ обратны кривым зависимости коэффициентов статического трения и прилипания микроскопических частиц от концентрации раствора электролитов ⁽⁷⁾. Сопротивление утоньшению остаточного слоя прежде всего определяется его толщиной, поэтому в выбранном интервале нагрузки (до 6—8 кГ/см²) у растворов, образующих при заданном давлении более тонкие остаточные слои, показатель этого сопротивления \bar{E} в большинстве случаев выше. С ростом концентрации раствора до 5—10 мг-экв/л \bar{E} увеличивается, но в дальнейшем почти не изменяется.

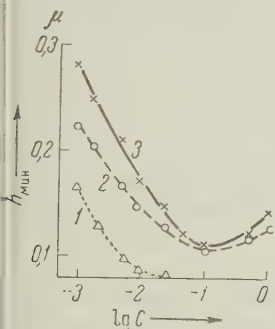


Рис. 1. Влияние концентрации (в г-экв/л) на толщину остаточного слоя раствора в зазоре между поверхностями кварца при контактном давлении 0,2 кГ/см². 1 — BaCl₂; 2 — KCl; 3 — NaCl

Качественное рассмотрение полученных данных приводит к заключению, что зазор между поверхностями кварца в растворах электролитов связан с толщиной диффузного слоя адсорбированных ионов и взаимодействием этих слоев. Отправляясь от теории двойного слоя Гуи — Чэпмена, Б. В. Дерягин ⁽⁸⁾ и А. Н. Фрумкин ⁽⁹⁾ получили уравнения, описывающие отталкивание плоских диффузных слоев. Для случая, когда потенциал поверхности значительно меньше RT/F , эти уравнения совпадают. Выразив χ (показатель толщины ионной атмосферы по Дебаю — Гюккелю) через $KZ\sqrt{C}$, где K — постоянная, Z — число зарядов иона диффузного слоя, C — концентрация раствора, уравнение можно переписать в следующей форме, удобной для проверки методом выравнивания: $F_r = KZ^2 C e^{-hKZ\sqrt{C}}$, где F — сила отталкивания сопряженных диффузных слоев, h — расстояние между поверхностями.

Совпадение экспериментальных данных (точки на рис. 2) с теоретической зависимостью показывает, что в растворах электролитов с концентрацией до 8—10 мг-экв/л ионы препятствуют сближению поверхностей на расстоянии эффективного действия вандерваальсовых сил, благодаря электростатическому отталкиванию диффузных слоев. В более концентри-

Таблица 2

Толщина остаточного слоя 0,01N растворов электролитов и его сопротивление утоньшению в зазоре между кварцевыми дисками

Электролиты	$h_{\min} (\mu)$ при контактном давлении (кГ/см ²)			\bar{E} (кГ/см ²) в интервале давлений	
	0,2	2,0	4,0	0,2—2,0	2,0—4,0
LiCl	0,25	0,11	0,06	3,3	5,5
NaCl	0,14	0,09	0,05	5,0	6,7
KCl	0,12	0,08	0,04	7,7	10,6
RbCl	0,11	0,08	—	7,2	—
CaCl ₂	0,08	0,06	0,04	4,1	9,6
AlCl ₃	0,08	0,05	0,03	6,2	12,0
Th(NO ₃) ₄	0,07	0,03	0,03	6,0	18,0

рованных растворах, а также при относительно больших расстояниях между поверхностями, порядка толщины граничного слоя, должен действовать неэлектростатический фактор взаимодействия *. Поскольку в этих слу

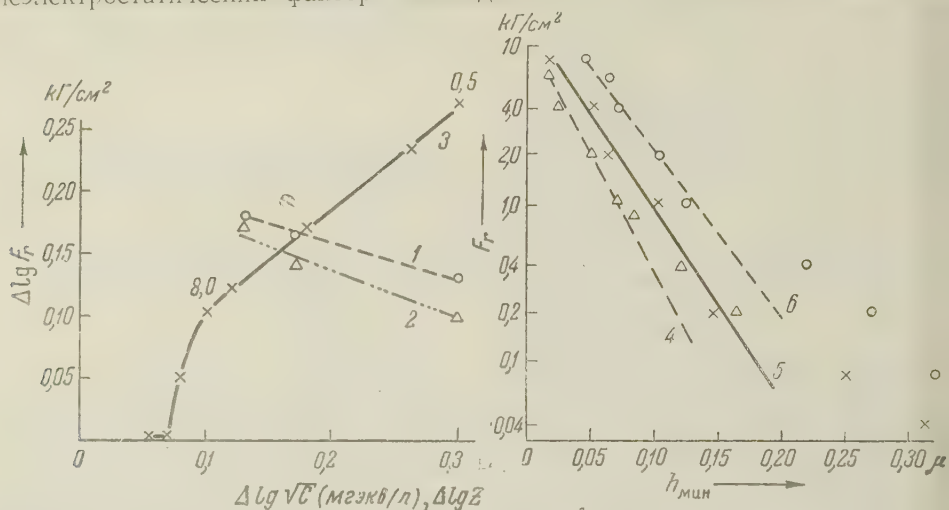


Рис. 2. Проверка методом выравнивания применимости уравнения силы отталкивания взаимодействующих диффузных слоев адсорбированных ионов. 1, 2 — $F_r = f(z, C)$ 1 — при $h_{\min} = 0,06 \pm 0,01 \mu$, 2 — при $h_{\min} = 0,04 \pm 0,01 \mu$; 3 — $F_r = f(C_{KCl})$ (цифры на кривой — значения C в мг-экв/л). 4, 5, 6 — $F_r = f(h)$. 4 — при $\chi = 1,5$ мг-экв на 1 л $CaCl_2$, 5 — при $\chi = 2,5$ мг-экв на 1 л KCl , 6 — при $\chi = 1$ мг-экв на 1 л $NaCl$

чаяя преобладающее значение имеет радиус ионов (по крайней мере в пределах одно- и двухвалентных катионов (6)), наиболее вероятно, что этим фактором является дальняя (10) или вторичная (11) гидратация ионов

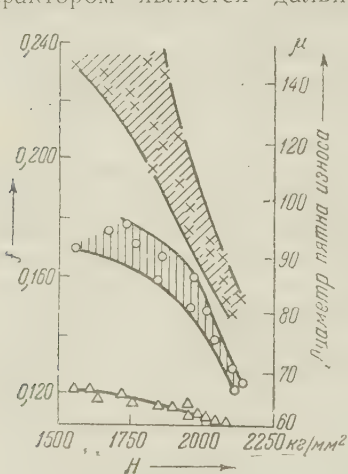


Рис. 3. Коэффициент трения (f) и износ рубина в растворах электролитов различного состава и концентрации в зависимости от микротвердости (H) рубина в этих растворах. 1 — Статическое трение; 2 — износ (трение 10 мин.); 3 — кинетическое трение

первом приближении, от состава ионов и концентрации раствора (рис. 3).

Высокие контактные давления, приближающиеся в наших трибометрических опытах к показателю микротвердости исследованных минералов, преодолевают репульсивную силу адсорбированных ионов, но влияние электролитов на взаимодействие поверхностей этих минералов не прекращается. Как видно из табл. 3, изменение трения в зависимости от состава раствора не соответствует приведенному выражению силы отталкивания диффузных слоев, и коэффициент трения определяется числом зарядов анионов и катионов, что свидетельствует о механизме действия ионов, не связанном с зарядом поверхности.

Специфическое действие электролитов при высоких контактных давлениях связано с их влиянием на поверхность минералов. Было показано (12), что в растворах нейтральных электролитов снижается микротвердость рубина и кварца (одно из проявлений адсорбционного понижения прочности твердых тел (13)). Трение (и износ) рубина, а в отдельных группах растворов и кварца, повышается с уменьшением их микротвердости, независимо,

в первом приближении, от состава ионов и концентрации раствора (рис. 3).

Вполне возможно, что разработка теории взаимодействия диффузных слоев на основе более совершенных представлений об их строении, чем предложенные Гуи, расширит область приложения механизма электростатического отталкивания, но нет оснований предполагать, что он станет универсальным.

Таблица 3

Коэффициент трения рубина и кварца в 0,001N растворах нейтральных электролитов
контактное давление: рубин 530, кварц 108 кГ/мм²; предварительное взаимодействие
минералов с растворами 1 час).

Электролиты	Статическое трение		Кинетическое трение		Электролиты	Статическое трение		Кинетическое трение	
	рубин	кварц	рубин	кварц		рубин	кварц	рубин	кварц
LiCl	0,105	0,440	0,150	0,320	K ₂ SO ₄	0,110	0,490	0,170	0,370
KCl	0,097	0,465	0,160	0,330	K ₃ Fe(CN) ₆	0,114	0,550	0,200	0,375
AlCl ₃	0,112	0,420	0,220	0,330	K ₄ Fe(CN) ₆	0,113	0,605	0,210	0,390
Th(NO ₃) ₄	0,114	0,350	0,225	0,350					

что объясняется повышением истинной площади контакта с «пластифицированием» поверхности. Если при этом удельная сила молекулярного взаимодействия не уменьшается (что в данном случае весьма вероятно), то электролиты увеличивают суммарную силу молекулярного взаимодействия.

Эффективное проявление рассмотренных механизмов действия электролитов на связь частиц (и макротел) в растворах определяется расстоянием между поверхностями.

Научно-исследовательский институт
часовой промышленности

Поступило
1 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. А. Ребиндер, Докл. совещ. по вязкости жидкостей и колл. растворов, Изд. АН СССР, 1, 1941, стр. 361; Колл. журн., 20, 527 (1958). ² Г. Фрейндлих, Тиксотропия, ИЛ, 1939; Г. И. Фукс, Колл. журн., 12, 228 (1950). ³ Г. И. Фукс, Тр. Всесоюз. конф. по колл. химии, Изд. АН СССР, 1956, стр. 301; Колл. журн., 20, 748 (1958). ⁴ Г. И. Фукс, Зав. лаб., 21, № 12, 1445 (1955). ⁵ Г. И. Фукс, Там же, 22, № 5, 594 (1956). ⁶ Г. И. Фукс, Н. И. Каверина, ДАН, 121, 332 (1958). ⁷ Г. И. Фукс, В. М. Клычников, Е. В. Цыганова, ДАН, 65, 307 (1949). ⁸ Б. В. Дерягин, Изв. АН СССР, сер. хим., № 5, 1153 (1937). ⁹ А. Н. Фрумкин, А. В. Городецкая, Acta Physicochimica URSS, 9, 327 (1938). ¹⁰ О. Я. Самойлов, Структура водных растворов электролитов и гидратация ионов, Изд. АН СССР, 1957. ¹¹ Д. Бокрис, Некоторые проблемы современной электрохимии ИЛ, 1958. ¹² Г. И. Фукс, Колл. журн., 22, № 2 (1960). ¹³ П. А. Ребиндер, Zs. Phys., 72, 191 (1931); Физико-химическая механика, М., 1958.

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Г. В. КУКОЛЕВ и М. Т. МЕЛЬНИК

ВЛИЯНИЕ ДОБАВОК Cr_2O_3 , P_2O_5 , V_2O_5 , BaO НА МИКРОСТРУКТУРУ
ПОРТЛАНДЦЕМЕНТНОГО КЛИНКЕРА

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 12 I 1960)

Физико-механические свойства продуктов твердения порландцемента обуславливаются, прежде всего, его химическим и, соответственно, минералогическим составом, а также микроструктурой клинкера. Мелкокристаллическая структура способствует, как известно, повышению гидравлических свойств цемента.

Образование твердых растворов, влияющих на структуру клинкерных минералов, также существенно изменяет свойства цемента. Так установлено, что при введении в сырьевую смесь перед ее обжигом добавок Cr_2O_3 , P_2O_5 , V_2O_5 и BaO , образующих твердые растворы с двухкальциевым силикатом, значительно изменяются свойства клинкера: улучшается размалываемость клинкера и повышается механическая прочность продуктов твердения портландцемента (¹⁻⁴). При этом изменяется, как показано в данной работе, и микроструктура клинкера.

Таблица 1

№ клинкера	Колич. добавок, %	Минералогич. состав клинкера, %			Размеры зерен клинкерных минералов, м						Предел прочности при сжатии образцов после 28 дней твердения, кг/см²
					алит			белит			
		алит	белит	промежуточное вещество	от	до	большинство	от	до	большинство	

$$K_H = 0,90$$

1	Без добавок	65	19	16	15	39	30	23	97	62	240
2	Cr_2O_3 1,5	55	31	14	45	140	100	50	120	90	122
3	P_2O_5 0,3	68	16	16	15	40	31	37	116	77	286
4	V_2O_5 1,0	61	21	18	23	57	50	54	155	77	308
5	BaO 1,5	70	18	12	15	45	38	38	110	70	314

$$K_H = 0,75$$

6	Без добавок	22	54	24	10	33	15	25	54	38	147
7	Cr_2O_3 1,5	16	64	20	39	100	85	38	115	83	142
8	P_2O_5 0,3	23	55	22	14	31	20	24	62	46	196
9	V_2O_5 1,0	26	54	19	14	31	23	30	73	56	220
10	BaO 1,5	26	54	20	15	45	30	30	68	55	243

$$K_H = 0,67$$

11	Без добавок	—	70	30	—	—	—	26	78	46	25
12	Cr_2O_3 1,5	—	73	27	—	—	—	32	90	55	31
13	P_2O_5 0,3	—	74	26	—	—	—	20	54	40	29
14	V_2O_5 1,0	—	74	26	—	—	—	26	69	50	40
15	BaO 1,5	2	71	29	77	150	116	27	77	55	91

Микроструктура изучалась нами в полированных аншлифах с помощью металлографического микроскопа в отраженном свете. Травление аншлифов производилось 0,25% раствором уксусной кислоты.

Микроскопическому анализу были подвергнуты образцы клинкеров с указанными добавками и без них. Клинкеры характеризовались коэффициентами насыщения кремнезема известью 0,9; 0,75 и 0,67. Результаты микроскопического исследования приведены в табл. 1.

Приведенные в табл. 1 данные показывают, что минералогические составы клинкеров с добавками и без них мало отличаются друг от друга. Вместе с тем, становится очевидно, что введение небольших количеств указанных добавок существенно изменяет микроструктуру клинкера. Это из-

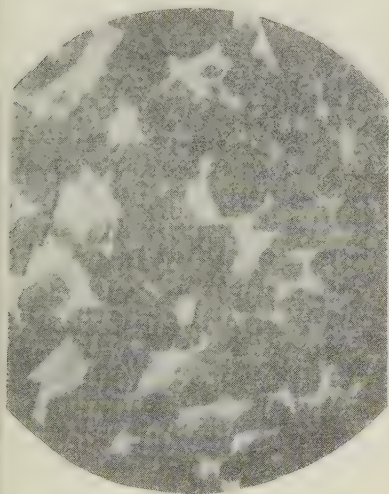


Рис. 1. Клинкер № 1 $K_H = 0,90$, без добавки. Мелкие темные зерна — алит; светлые поля — промежуточное вещество. Отраженный свет; 400 \times

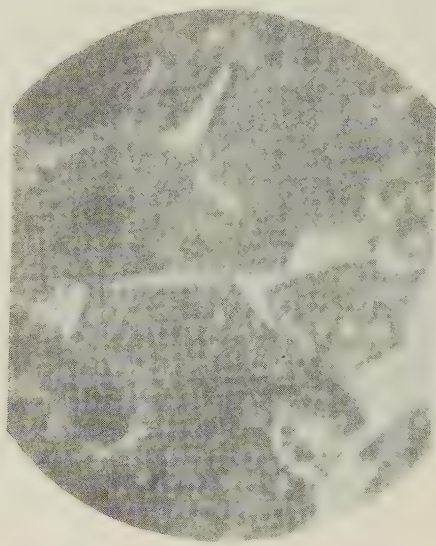


Рис. 2. Клинкер № 2 $K_H = 0,90$, с добавкой 1,5% C_2O_3 . Темные большие зерна — алит; светлые поля — промежуточное вещество. Отраженный свет; 400 \times

менение заключается в увеличении размеров зерен минералов. (1,5—3 раза более) и в появлении значительной пористости. Кроме того, кристаллы цемента и белита клинкеров с добавками сами отличаются весьма рыхлой пористостью травления, по сравнению с клинкерами без добавок (рис. 2).

Наиболее крупные по размерам кристаллы отмечены в клинкерах с добавкой 1,5% C_2O_3 . При наличии последней, размеры кристаллов алита в большинстве своем достигают 85—100 μ , в то время, как зерна алита клинкера без добавок имеют размеры только от 10—15 μ до 33—39 μ . Размеры зерен белита в клинкере с добавкой 1,5% C_2O_3 доходят до 115—120 μ , а в размерах большинства кристаллов 83—90 μ (без добавок — только 54—97 μ при размерах большинства 38—62 μ).

Действие добавок P_2O_5 , V_2O_5 и BaO в этом отношении несколько менее выражено, хотя их присутствие заметно сказывается на размерах зерен клинкерных минералов.

В присутствии V_2O_5 и BaO зерна алита либо не изменяют своих размеров, либо несколько увеличиваются, особенно, если судить по размерам большинства зерен. Зерна же белита достигают здесь весьма больших размеров, по сравнению с зернами белита в клинкере без добавок (рис. 3). Наиболее ярко это наблюдается в клинкерах с K_H 0,90, где зерна белита достигают размеров 110—155 μ .

При K_H 0,9 и 0,75 добавка 0,3% P_2O_5 , дающей твердый раствор в белите, несколько увеличивает кристаллы последнего.

В клинкерах с K_H 0,67, в которых по расчетным данным C_2S должен отсутствовать, при добавке 1,5% BaO наблюдается до 2% кристаллов сходных с C_2S . Такие зерна очень четко выкристаллизованы почти правильными шестигранниками, размеры которых весьма увеличены и достигают 150 м (рис. 4).

При рассмотрении в поляризационном микроскопе клинкера с K_H 0,67 в присутствии добавки 1,5% BaO зерна алита не были обнаружены. Не исключено, что наблюдаемые в отраженном свете кристаллы шестигранной формы являются не алитом, а белитом в его высокотемпературной модификации.

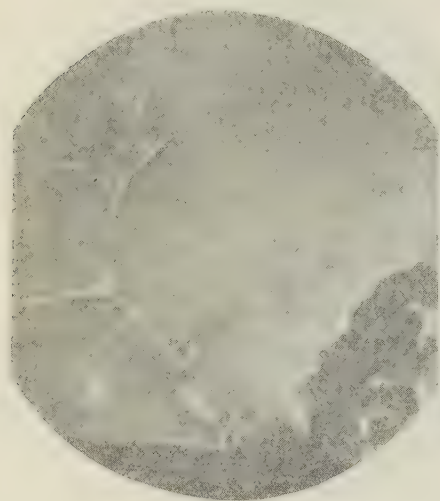


Рис. 3. Клинкер № 4. $K_H = 0,90$, с добавкой 1,0% V_2O_5 . Темные мелкие зерна — алит; светло-серые крупные зерна — белит; тонкие белые полосы — промежуточное вещество. Отраженный свет; 400 ×

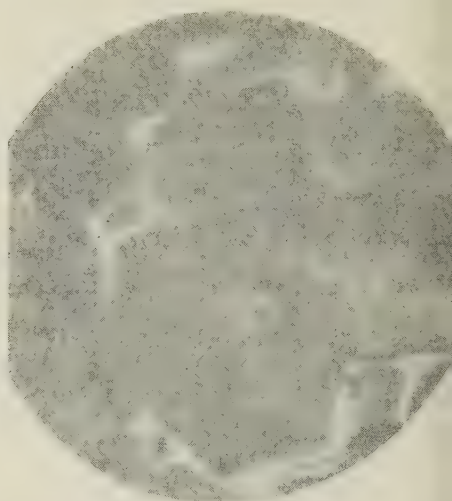


Рис. 4. Клинкер № 15. $K_H = 0,67$, с добавкой 1,5% BaO . Кристалл шестигранной формы — алит; темные округлые зерна — белит, светлые поля — промежуточное вещество. Отраженный свет; 400 ×

Зерна белита в клинкерах с K_H 0,67 с такими же по количеству добавками P_2O_5 , V_2O_5 и BaO имеют, примерно, такие же размеры, как и в клинкере без указанных добавок. Это следует приписать резкому увеличению количества C_2S при K_H 0,67.

На основании приведенных исследований можно заключить, что размеры кристаллов алита и белита в присутствии добавок Si_2O_3 , P_2O_5 , V_2O_5 и BaO могут при определенных условиях заметно увеличиваться. Очевидно в присутствии указанных добавок создается благоприятная среда для кристаллизации и дальнейшего роста клинкерных минералов. При этом отмечается довольно четкая и правильная форма кристаллов клинкера (рис. 1—4).

Как видно из табл. 1, увеличение гидравлической активности клинкеров при указанных здесь условиях (особенно с добавками BaO и V_2O_5) может достигаться и при одновременном увеличении размеров кристаллов, хотя с общепринятой точки зрения для этого необходимо уменьшение их размеров. Сказанным демонстрируется значение структуры клинкерных минералов для их твердения.

Это явление следует отнести за счет получения клинкерных минералов в первую очередь белита, в более активном состоянии, что является результатом образования твердых растворов, особенно между двухкальциевым силикатом и указанными добавками (², ⁴).

Ускорение роста кристаллов силикатов кальция, очевидно, может быть обусловлено увеличением под влиянием добавки удельной свободной поверхности энергии на фазовой границе кристалл — расплав, уменьшением вязкости и изменением строения силикатного расплава в сторону наибольшего образования сиботаксических областей, ближний порядок которых отвечает таковому спекающейся твердой фазы.

Высоковалентные катионы добавок притягивают к себе кислородные анионы от катионов кальция. ВаО, отдавая свой кислород кремнекислородным комплексам, дробит последние. То и другое должно быть благоприятным для построения решетки и кристаллизации ортосиликата, относящегося к островному типу.

Повышение прочности продуктов твердения при введении окислов, особенно пентавалентных катионов, несомненно связано с возникновением дефектов в решетке твердого раствора типа катионных вакансий. В случае же введения весьма крупных катионов бария взамен Ca^{2+} энергия связи катионов с кислородом делается меньше. В результате энергия решетки силиката уменьшается и он делается химически более активным к реакции гидратации.

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
7 II 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Д. Ершов, Цемент, № 4 (1955). ² Г. В. Куколев, М. Т. Мельник, Цемент, № 1 (1956). ³ М. Т. Мельник, Тр. Харьковск. политехнич. инст. им. В. И. Ленина, 17 (1958). ⁴ Г. В. Куколев, М. Т. Мельник, ДАН, 109, № 5 (1956).

Г. Л. БЕЛЬГОВСКИЙ и Л. А. ЭКТОВА

НОВЫЕ ДАННЫЕ О ГЕОЛОГИИ ПАЛЕОЗОЙСКИХ ОБРАЗОВАНИЙ
ХРЕБТОВ САУР, САЙКАН, МАНРАК И ВОСТОЧНЫЙ
ТАРБАГАТАЙ

(Представлено академиком Д. В. Наливкиным 16 XII 1959)

Основные сведения о геологическом строении хребтов Саур, Сайкан, Манрак и Восточный Тарбагатай приведены в работах В. А. Обручева⁽⁶⁾ и В. П. Нехорошева⁽³⁾. После опубликования этих трудов каких-либо работ с изложением новых материалов в печати не появлялось. В настоящей статье излагаются новые данные по стратиграфии и тектонике палеозойских образований указанных хребтов, существенно дополняющие имеющиеся представления.

С и л у р — н и ж н и й д е в о н. Древнейшими отложениями являются породы верхнесилурийского — нижнедевонского возраста, обнажающиеся на водоразделе рр. Чаган-обо и Кобук, представленные слоистыми хлоритовыми сланцами и хлоритизированными алевролитами зеленого и бордово-красного цвета с прослоями серых окремненных сланцев и эпидотизированных порфиритов. Подобные породы хр. Майли-Джаир В. А. Обручев⁽⁶⁾ относит к силуру и нижнему девону. Мощность около 1000 м.

С р е д н и й — в е р х н и й д е в о н. Породы девона широко распространены юго-восточнее г. Зайсан. В их составе развиты диабазовые порфириты, их туфы, агломераты и реже — известковистые песчаники и алевролиты. В туффитах из верхней части свиты найдены *Charactophyllum* cf. *antiquum* Soshk., *Pseudoamplexum* sp. n., *Thamnopora* ex gr. *reticulata* (Blainv.) эйфельского возраста (Н. Я. Спасский) и *Atrypa* cf. *reticulata*, *Productus* (*Avonia*) *spinulicostus* Hall., *Spirifer* cf. *kosak* Nat., *Athyris* cf. *angelica* Hall., указывающие (А. П. Ротай) на верхи среднего или низы верхнего девона (майские слои). Мощность 900 м.

На хр. Вост. Тарбаратай, в туфопесчаниках, были найдены *Schellwienella* ex gr. *umbraculus* Schloth., *Productella* cf. *spinulicosta* Hall., *Atrypa independensis* Webst., *Brachyspirifer* seid Nal., указывающие на верхи живетского яруса (М. А. Ржонсницкая).

Верхнетурнейские отложения широко развиты в западной части хребта Саур, где трансгрессивно налегают на породы девона. По литологическому составу они делятся на две толщи, общей мощностью в 1000 м.

Нижняя сложена полосчатыми кремнистыми сланцами голубовато-зеленоватого цвета. Верхняя — серыми и черными глинистыми и кремнистыми сланцами, туфами, известняками, песчаниками и пироксено-плагноклазовыми порфиритами. В известковистых песчаниках были собраны *Spirifer* aff. *tornacensis* Kon., *Spirifer* sp. ex gr. *plenus* Hall.⁽²⁾ и мшанки *Tabulipora* sp., *Batostomella* sp., *Fenestella multispinosa* Ulr., *Polypora* sp., *Pinatopora* sp., *Rhombopora* aff. *attenuata* Ulr., *Nikiforovella* cf. *kasakhstanica* Nech., *Sulcoretopora dichotoma* (Nikif.) верхнетурнейского возраста (определение В. П. Нехорошева).

В и з е й с к и е о т л о ж е н и я. Манракская свита. Широко развита на хр. Манрак и слагается роговообманково-плагноклазовыми

пироксено-плагиоклазовыми порфиритами и их туфами, с прослоями туфопесчаников и туфоагломератов. Породы свиты с несогласием налегают на подстилающие отложения и перекрываются фаунистически охарактеризованными отложениями куржунбайской свиты визейского возраста, что определяет их стратиграфическое положение. Мощность свиты 400 м.

Куржунбайская свита. Породы свиты обнажаются в восточной части хр. Саур и др. и повсеместно имеют нормальный стратиграфический контакт с породами манракской свиты. В основании свиты залегают слоистые туфы, чередующиеся с тонкими пачками глинистых сланцев и пластовыми залежами порфиритов. Верхнюю часть разреза составляют порфириты, туфы и туфоагломераты с редкими прослоями алевролитов и туфопесчаников. В последних, в верховьях р. Куржунбай, были найдены *Phonetes dalmaniana* Kon., *Spirifer* sp. n., *Productus* (*Dictyoclostus*) cf. *insulptus* Muir-Wood., визейского возраста (А. П. Ротай). Из этой же толщи собраны отпечатки cf. *Lepidodendron kirghisicum* Zal., *Siberiodendron* sp., *Calamites* sp. визе-намюрского возраста (Г. П. Радченко)

Мощность свиты 900 м.

Средний карбон. Эргизбайская свита. Свита широко распространена на хр. Саур, Сайкан и Манрак, где с угловым несогласием налегает на породы куржунбайской свиты визе и других свит палеозоя. На хр. Сайкан в основании свиты залегают плагиоклазовые порфириты с прослоями полимиктовых песчаников и туфов. Выше развиты базальты, андезиты и андезит-базальты; встречаются пластовые залежи андезитовых порфиритов, диабазовые порфириты и их туфы. В верхней части разреза преобладают альбитофиры и кварцевые порфириты и их туфы. Мощность свиты изменчива: на хр. Сайкан она равна 1500 м, а на хр. Манрак не превышает 500 м. В туфопесчаниках свиты на р. Даранаозень были собраны *Paracalamites* sp., *Belonopteris mongolicum* (Zal.) Radcz., *Belonopteris kirghisicum* (Tschirk.) Radcz., *Angaridium tologoicum* Tschirk., *Angaropteridium cardiopteroides* (Schm.), *Angaropteridium grandifolialatum* Zal., *Angaropteridium trigoniatum* sp. n., *Ginkgophyllum kalbicum* Tschirk., «*Elatocladus*» *kassagashchika* (Tschirk.) Krysht.

Г. П. Радченко указывает, что данный комплекс близок к флоре, описанной из Калбы Е. Ф. Чирковой, и имеет много общего, даже ряд тождественных форм, с флорой черногорской свиты Минусинского бассейна, которая сопоставляется с верхней частью мазуровской толщи Кузнецкого бассейна. По мнению Г. П. Радченко, эта флора указывает на верхи среднего карбона, либо самые низы верхнего карбона.

Джеменейская свита. В пределах описываемых хребтов породы свиты распространены широко и залегают с угловым несогласием на подстилающих отложениях. В основании свита сложена андезитовыми порфиритами, альбитофирами и их туфами. Верхняя часть разреза представлена граувакковыми песчаниками, конгломератами, туфоагломератами и гиллитами с отпечатками *Paracalamites* sp., *Sphenopteris* sp., *Angaropteridium* sp., *Gondwanidium* cf. *petiolatum* Nekh., *Angaridium* sp., *Noeggerathopsis* cf. *theodori* Tschirk. et Zal., *Samaropsis* sp. (определения В. Сухова), характерными для нижней части алыкаевской подсвиты Кузнецкого бассейна. Мощность 600—1000 м.

Описание палеозойских отложений более молодого возраста, развитых преимущественно в Кендерлыкской мульде, в настоящей статье не приводится, так как они уже подробно описаны В. К. Василенко (1).

Ниже излагаются новые данные, свидетельствующие о верхнепалеозойском возрасте саурского интрузивного комплекса на Сауре.

В восточной части хр. Сайкан интрузия сиенито-диоритов прорывает толщу осадочно-вулканогенных пород (относимую В. П. Нехорошевым (3) к нижнему визе) и, в свою очередь, покрывается пачкой конгломератов, параллелизуемой указанным исследователем (2-5) с внутрiformационными верхневизейскими конгломератами Калбы и г. Аркаул. Однако визейские

отложения Саура по вещественному составу совершенно не сходны с породами хр. Сайкан, принадлежащими эргизбайской свите, среднекаменноугольный возраст которой отчетливо устанавливается приведенным выше списком растений. Интрузия сиенито-диоритов прорывает эти отложения в направлении, поперечном к присущим им простирациям, что отчетливо видно в урочище Майчилек.

Выход на р. Обайлы (северный склон хр. Сайкан), приводимый (², ³) в качестве образца трансгрессивного налегания конгломератовой толщи верхневизейского возраста на размытую поверхность сиенито-диоритов, имеет совершенно иную геологическую природу. На правом склоне р. Обайлы, против старого казахского кладбища, обнажается пачка конгломератов с очень хорошо окатанной галькой и глыбами, достигающими 1 м в поперечнике. Галька конгломерата очень разнообразная. В. П. Нехорошев указывает на присутствие здесь биотитового гранодиорита, розового сиенит-диорита, роговообманково-биотитового гранита, мясо-красного микрогранита, жильного гранита, серого кварцевого порфира, альбитофира, фельзита, андезитового порфирита, альбитового порфирита, диоритового порфирита, туфа кварцевого альбитофира и туфа порфирита. В дополнение к этому списку следует добавить пироксен-плагноклазовый порфирит и туфы андезитового и кварцевого порфиритов.

Вся пачка конгломерата имеет мощность в 15—20 м и протягивается по склону р. Обайлы на 40—50 м. Падения в конгломератах отчетливо не видно. Непосредственно ниже их (без видимого контакта) располагаются палеоандезиты мощностью около 15 м, а еще ниже туфы зеленовато-серого цвета, мощность которых превышает несколько десятков метров. На северо-востоке и востоке пачка конгломератов ограничивается выходами светло-серых контактовоизмененных кристаллических пород, которые выше по склону сменяются розовыми сиенито-диоритами, слагающими основную массу всей интрузии, прорывающей восточную часть Сайкана.

Конгломераты на р. Обайлы и г. Аркаул совершенно не сходны. На р. Обайлы обнажаются, по существу, валунные нагромождения, на которые внутриформационные прослои конгломератов г. Аркаул и Калбы ни в коей степени не похожи. Конгломераты на р. Обайлы представляют собою толщу очень грубого сложения, в гальках которой в изобилии встречаются все разности пород, типичные для среднекаменноугольных отложений Саура. Залегание конгломератов в виде «прислонения» к крутому склону какого-то древнего рельефа наводит на мысль, что они моложе, чем палеозойские.

Всесоюзный научно-исследовательский
геологический институт

Поступило
10 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. К. Василенко, Угольное геол. совещ. 2-е, Ленинград, 1955, Тез. докл., Изд. АН СССР, 1955. ² В. П. Нехорошев, Хребет Саур, 1941. ³ В. П. Нехорошев, Сов. геол., № 2 (1944). ⁴ В. П. Нехорошев, Особенности геологического строения Алтая и его юго-западной периферии, 1954. ⁵ В. П. Нехорошев, Геология Алтая, 1958. ⁶ В. А. Обручев, Пограничная Джунгария, 3, в. 2 (1940).

Иг. В. ВАСИЛЬЕВ

ОТПЕЧАТКИ РАСТЕНИЙ ИЗ НЕОГЕНОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ БЕЛОРУССИИ

(Представлено академиком Д. В. Наливкиным 9 I 1960)

В 1957 и 1958 гг. А. Г. Бер передала нам две небольшие коллекции отпечатков третичных растений, отобранных из керна скважин, пробуренных в южной части Белоруссии близ гг. Иваново, Городец, Луинец, Красная Слобода, Мозырь, Стырь-Горынь, Старобин.

Сведения о неогеновой флоре Белоруссии весьма скудны. Они ограничиваются лишь несколькими работами, основанными на данных спорово-пыльцевого анализа. С. С. Маныкин ⁽¹⁾, изучавший спорово-пыльцевые комплексы БССР, отмечает, что в миоцене на территории Белоруссии господствовали широколиственные и смешанные леса, сменившие субтропические полтавские группировки в связи с наступившим похолоданием. В другой работе ⁽²⁾ тот же автор дает палинологическую характеристику отложений бучакского, киевского и харьковского ярусов, а также полтавской свиты. Стратиграфия третичных отложений Белоруссии разработана еще далеко недостаточно. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что упомянутая полтавская свита включает в себя континентальные отложения не только всего миоцена, но и верхов олигоцена. С. С. Маныкин ⁽²⁾ подразделяет эту свиту на два горизонта: нижний — горизонт серых кварцевых песков — и верхний — горизонт серых и пестроцветных глин. В нижнем горизонте господствует пыльца *Taxodiaceae*, встречено много пыльцы *Pinus*, *Cupressaceae*, *Picea*, реже попадает пыльца папоротников и покрытосеменных: *Polypodiaceae*, *Gleichenia*, *Ophioglossum*, *Rhus*, *Castanea*, *Nyssa*, *Carya*, *Quercus*, *Carpinus*, *Ericaceae*.

В спорово-пыльцевом комплексе из верхнего горизонта преобладает пыльца *Pinus* и *Picea*; кроме того, обнаружены споры и пыльца *Polypodiaceae*, *Tsuga*, *Podocarpus*, *Sequoia*, *Cupressaceae*, *Alnus*, *Betula*, *Corylus*, *Carpinus*, *Fagus*, *Ulmus*, *Castanea*, *Rhus*, *Nyssa*, *Ilex*, *Salix*.

В монографии М. М. Цапенко и Н. А. Махнач ⁽⁴⁾ сведения о третичной растительности, основанные на спорово-пыльцевых данных, ограничиваются плиоценом окрестностей дер. Пиваши Старобинского района. В Старобинском районе плиоценовая растительность представляла собой смешанные и широколиственные леса с примесью теплолюбивых элементов, служащих указанием на теплый и мягкий климат того времени.

Имеющиеся сведения, так же как и наши данные, о неогеновой флоре БССР касаются лишь южной части Белоруссии.

Отпечатки листьев растений сохранились в глинах, обычно коричневатых, зеленовато-серых до темно-бурых, иногда несколько опесчаненных. Сохранность отпечатков плохая; поэтому лишь небольшое число их поддается точному определению. В результате обработки материала были выделены следующие формы (по местонахождениям)*:

* Материал по скважине № 161 был собран Е. П. Брунс, по остальным местонахождениям — А. Г. Бер.

1. Скважина № 1 (к северо-западу от г. Луинец; глубина 43,9—46,4 м): *Phragmites Oeningensis* A. Br., *Phragmites* sp., *Cyperites* sp., cf. *Populus latior* A. Br., *Quercus* sp. n., *Q.* (?) sp., *Phyllites* sp.

2. Скважина № 7 (Стырь-Горынь; образец № 1539; глубина 25,0 м): *Phragmites* sp., *Phyllites* sp.

3. Скважина № 36 (Иваново). Образцы №№ 1585 и 1591 (глубина 51,5 м): *Taxodium dulium* (Sternb.) Heer, *Taxodium* sp., *Pterocarya castaneifolia* (Goepf.) Schlecht., *Cyclocarya* sp., *Populus* sp., *Quercus* sp., *Spiraea vetusta* Heer, *Phyllites* sp. Образец № 1589 (глубина 49,6 м): *Taxodium* sp., *Carpinus* sp., *Phyllites* sp. cf. *Ulmus* L., *Podogonium* sp. cf. *Podogonium Lyellianum* Heer.

4. Скважина № 53 (Городец; глубина 44,7 — 44,8 м): *Taxodium* sp., *Carya* sp., *Betula prisca* Ett., *B.* sp. cf. *B. Blanchetii* Heer, *Fagus* sp., *Ulmus* sp. cf. *U. carpinoides* (Goepf.) Kräusel, *Podogonium* sp. cf. *P. Lyellianum* Heer, *Leguminosites* sp. (*Caesalpinia*?), *Crataegus* sp., *Phyllites* sp.

5. Скважина № 61 (к юго-западу от г. Старобин и к северо-востоку от г. Луинец; глубина 81,5—84,3 м): *Populus attenuata* A. Br.

6. Скважина № 75 (к юго-западу от г. Мозырь; глубина 27,0 — 27,5 м): *Salix angusta* A. Br.

7. Скважина № 105 (к юго-востоку от г. Красная Слобода; глубина 91,0 — 91,5 м): *Salix denticulata* Heer, *S. varians* Goepf., *S.* cf. *Haidingeri* Ett., *S.* cf. *tenera* A. Br., *Populus* sp., *Phyllites* sp. cf. *Podogonium latifolium* Heer, *Leguminosites* sp. (сходен с *Wisteria macrostachys* Nath.), *Ulmus* cf. *carpinoides* Goepf.

8. Скважина № 109 (к юго-западу от г. Красная Слобода). Глубина 72,3 м: *Filicites* (?) (чешуйка), *Ribes* (*Grossularia*?) sp., *Phyllites* sp. Глубина 74,3 м: *Betula macrophylla* (Goepf.) Heer, *Salix varians* Goepf., *Leguminosites* sp. Глубина 75,0 м: *Coniferae* sp. (отдельные неопределимые хвой), *Betula macrophylla* (Goepf.) Heer., *Salix* cf. *tenera* A. Br., *Rhamnus* (?) sp.

Все перечисленные формы характеризуют приблизительно одну и ту же неогеновую толщу. Однако объединять списки остатков растений и считать их одновозрастными не представляется возможным, так как они происходят из разных местонахождений, с разных глубин и неравноценны по своему содержанию: из одних скважин получен комплекс растительных форм, в других же найдены лишь один-два отпечатка, по которым нельзя судить о возрасте вмещающих отложений. Весьма вероятно, что возраст их одинаков, но с полной уверенностью говорить об этом нельзя. Поэтому комплексы рассматриваются по отдельным скважинам.

Наиболее полно палеоботанически охарактеризованы скважины №№ 36, 53, 105 и 109, расположенные вблизи гг. Иваново, Городец и Красная Слобода. Однако и здесь выясненный флористический список весьма беден. В общих чертах он сходен с сарматскими флорами Молдавии^(*) и Амвросиевки^(**). Наличие в списке представителей сем. *Leguminosae* (*Podogonium*, *Leguminosites*) и *Rosaceae* (*Spiraea*, *Crataegus*) в особенности подчеркивает это сходство. *Salix denticulata* Heer и *S.* cf. *tenera* A. Br., отпечатки которых обнаружены в керне скважины № 105, существовали лишь в миоцене. Таким образом, материал из скважин №№ 36, 53, 105 и 109 свидетельствует о миоценовом возрасте вмещающих отложений. Сходство полученных списков с сарматскими флорами Амвросиевки и Молдавии позволяет допустить верхнемиоценовый (сарматский) возраст изученной флоры.

Материал из других скважин дополняет сведения о неогеновой флоре Белоруссии. Так, в скважине № 1 (Луинец) обнаружен отпечаток нового вида *Quercus*, пока не описанного, а также отпечатки, весьма сходные с распространенными в палеогене и неогене *Populus latior* A. Br., *Populus attenuata* A. Br., существовавшими в среднем и позднем миоцене Западной Европы и известными из сармата Молдавии и определенными из скважины № 61 (Старобин). Из скважины № 75 (Мозырь) определено большое количество отпечатков *Salix angusta* A. Br. Этот вид был широко распространен

миоцене — плиоцене Западной Европы, известен из олигоцена Западного Закавказья, позднего миоцена Армении, плиоцена Рыбной Слободы на Кавказе. Таким образом, глины, в которых найдены отпечатки растений, по всей видимости, относятся к верхнему горизонту полтавской свиты. Эти глины перекрываются глинистыми или чаще песчанистыми плиоценовыми и четвертичными отложениями, а подстилаются коричневыми, бурыми и черными кварцевыми песками нижнего — среднего миоцена, лежащими с разрывом на отложениях харьковского яруса.

В результате находки отпечатков растений отложения, ранее бывшие почти немymi, получили дополнительную характеристику, подтверждающую выводы палинологов о типе растительности неогена Белоруссии. В то время здесь были развиты смешанные леса с участием таких теплолюбивых пород, как *Taxodium dubium* (Sternb.) Heer., *Pterocarya castaneifolia* (Goerpp.) Schlecht., *Ulmus* sp., *Quercus* sp. и др., т. е. флора Белоруссии в неогене была сходна с синхронными флорами Украины, Молдавии, Западной Европы и позднеолигоценовыми и раннемиоценовыми флорами Казахстана и Западной Сибири. Сравнивая наши данные с данными, приведенными в работе М. М. Цапенко и Н. А. Махнач⁽⁴⁾ относительно плиоценовой флоры БССР, можно сделать заключение, что на протяжении позднего миоцена и плиоцена флора Белоруссии сохраняла относительно постоянный характер, что свидетельствует об очень медленном похолодании климата в течение неогена.

Обнаруженный комплекс отпечатков растений из неогеновых (в основном сарматских) отложений Белоруссии, хотя и неполон, фрагментарен и беден видами, но все же по своему значению для стратиграфии и палеоботаники становится в ряд с известными европейскими флорами и требует новых исследований и пополнений.

Всесоюзный научно-исследовательский
геологический институт

Поступило
6 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. С. М а н ы к и н, Уч. зап. Белорусск. унив., в. 28, 98 (1956). ² С. С. М а н ы к и н, Тр. Инст. геол. наук АН БССР, в. 1 (1958). ³ Н. В. П и м е н о в а, Тр. Инст. геол. наук АН УССР, сер. стратиграфич. и палеонтол., в. 8 (1954). ⁴ М. М. Ц а п е н к о, Н. А. М а х н а ч, Антропогеновые отложения Белоруссии, Минск, 1959. ⁵ Т. А. Я к у б о в с к а я, Тр. Бот. инст. АН СССР, сер. 1, в. 11 (1955).

И. Д. ГОФШТЕЙН и В. П. КОСТЮК

НОВЫЕ ДАННЫЕ О СОСТАВЕ ПИСТЫНСКИХ КОНГЛОМЕРАТОВ (КАРПАТЫ)

(Представлено академиком В. С. Соболевым 26 XII 1959)

В разрезе моласс Предкарпатья известна свита пистынских конгломератов, которая относится к самым верхам тортона — низам сармата. Мощность ее около 400 м. В названных конгломератах впервые обнаружена галька изверженных пород: совершенно свежих липаритов, кварцевых порфиров, гранитоидов. Находка липаритов открывает совершенно новую черту вулканизма в Карпатах, где во внешней (флишевой) зоне подобные породы неизвестны ни у нас, ни в соседних странах. В связи с этим появилась возможность в первом приближении ставить вопрос о связи разрывной тектоники Предкарпатского краевого прогиба с проявлениями вулканизма. Это также позволяет по-новому подойти к решению вопроса о происхождении некоторых туфов, залегающих среди моласс Предкарпатья.

Пистынские конгломераты представляют дельту древней карпатской реки и состоят из обломков пород, широко распространенных во флишевой зоне Восточных Карпат. Изверженные же породы здесь неизвестны. И если гальку гранитоидов в конгломератах можно считать переотложенной, то в отношении липаритов (а возможно, также и кварцевых порфиров) этого сказать нельзя.

Все исследователи (польские и советские), изучавшие пистынские конгломераты, согласно отмечают, что они состоят из пород карпатского флиша (^{3, 4, 6, 7}). У одного Б. Свидерского (⁷) имеется указание, что помимо флишевого материала в составе конгломерата еще встречаются зеленые филлиты, вымытые из более древних (бурдигальских) слободских конгломератов. Эти последние развиты ближе к краю Карпат.

В дельтовой природе пистынских конгломератов убеждает, помимо их состава, ряд фактов (что отмечено еще первыми исследователями): 1) конгломераты фациально замещаются лагунно-континентальными осадками; 2) они образуют огромную линзу среди песчанистых отложений; 3) площадь их распространения имеет вид широкого конуса выноса; 4) к северо-западу конгломераты замещаются угленосными слоями, в которых встречаются листья растений горной флоры со следами далекого переноса (⁶).

В составе гальки пистынских конгломератов (по pp. Пистынке и Рыбнице и на их водоразделе) вместе с изверженными обнаружены и метаморфические породы: упоминавшиеся уже зеленые филлиты, а также графитово-кварцевые сланцы, кварц, скрытокристаллические и крупнозернистые известняки, розовые кварциты, кварцевые конгломераты типа веррукано-слюдяные и кварцево-слюдяные сланцы. Перечисленные метаморфические породы обычны для карпатских конгломератов (слободских и др.). Нет сомнения, что галька этих пород в пистынских конгломератах переотложена.

Можно допустить, что и галька изверженных пород вымыта из слободских конгломератов. Но это справедливо только по отношению к сильно измененным гранитоидам, которые по степени метаморфизма могут быть поставлены в один ряд с метаморфическими породами из слободских конгломератов (отметим, что эти древние породы теперь относят к рифею (²)). Об-

ломки изверженных пород, которые изредка находят в слободских конгломератах, представлены именно сильно измененными гранитоидными породами (5). Найденные же менее измененные кварцевые порфиры, и в особенности свежие липариты, конечно, не могут относиться к древнему метаморфическому комплексу слободских конгломератов. По изложенным соображениям, не могли они также быть принесены с Раховского кристаллического массива и Чивчинских гор. Если даже предположить, что там имеются неизвестные нам кайнотипные липариты, то из наблюдений над аллювием современных рек следует, что крупные обломки этих пород не могли быть вынесены в Предкарпатье. Действительно, среди валунов и галек р. Прут, размывающей в верховьях метаморфические породы Чивчинских гор, у края Карпат уже нет следов этих пород. В пыстынских же конгломератах величина обломков липаритов и кварцевых порфиров достигает 20 см.

В результате микроскопического исследования липаритов установлено, что эти породы представляют очень редкую для всего Карпатского региона разновидность типичных липаритов. Вкрапленники этих пород размером 1—3, изредка до 5 мм) состоят из кварца, полевых шпатов и биотита и слагают 12—15% валового состава породы. Полевые шпаты представлены плагиоклазом и калишпатом, причем либо эти минералы присутствуют в равных количествах, либо последний преобладает. Таблицы калишпата нередко имеют простое двойникование, иногда содержат микропертитовые вроски. Минерал, как правило, совершенно свежий, водяно-прозрачный и лишь кое-где слегка пелитизированный. Показатели преломления $N'_g = 1,525$, $N'_p = 1,519$, измеренные в ряде образцов, и умеренная величина $2V = 32^\circ$ свидетельствуют о принадлежности минерала к ортоклазу, точнее к его разновидности — санидину, в котором содержится до 10% альбитового компонента ((1), стр. 495). Двойниковая ось с координатами $N_g = 85$, $N_m = 20$, $N_p = 70$ ложится на кривую Карлсбадского закона двойникования. Таблицы калишпата в краях застывшую оплавлены, имеют бухтообразные затеки, выполненные мезостазисом основной массы. Последний содержится также в виде захваченных пойкилитовых) включений внутри таблиц. Все эти признаки с несомненностью указывают на кристаллизацию калишпата в магматическую стадию.

Плагиоклаз, в отличие от калишпата, чаще в той или иной мере вмещен пелито-серицитовыми новообразованиями. Полисинтетически двойникованные таблицы его имеют $N'_g = 1,552$, $N'_p = 1,543$, т. е. относятся к кислому андезину №№ 33—35. Такая же основность была получена при измерениях на федоровском столике: $BN_g = 15$, $BN_m = 75$, $BN_p = 85$, № 35 по \perp (010).

Кварц выделяется в свежих водяно-прозрачных кристаллах. В многочисленных бухтообразных затеках или в пойкилитовых включениях содержится захваченный при росте магматический расплав. Никаких следов метаморфического воздействия (катаклаз, мозаичность, облачное огасание и т. д.) не обнаруживается.

Биотит также кристаллизовался в интрателлурических условиях. Он выделяется в хорошо оформленных чешуйках с резким плеохроизмом от расновато-бурых, темных тонов по N_g до соломенно-желтых по N_p . Константы его в разных случаях несколько варьируют в пределах $N_g(N_m) = 1,643—1,648$, что отвечает содержанию 50—55 мол. % железистого компонента.

Основная масса сложена двумя главнейшими компонентами — кварцем и калишпатом, образующими нередко микрогранозернистую структуру. Иногда отмечается перекристаллизация калишпата в литофизах; нередко мелко место возникновение тонких каемок калишпата по периферии бывших сферолитов. В особенности хорошо выкристаллизован калишпат в окружающих породе трещинах.

Таким образом, мы здесь сталкиваемся с типичным калишпатовым липаритом, в котором первично-магматическое (не метасоматическое) происхождение калишпата несомненно. В Карпатах липариты, подобные найденным, известны только в одном месте (в районе Банской Штявницы в Западных Карпатах Словакии).

Кварцевые порфиры в отличие от липаритов не содержат калишпата ни во вкрапленниках, ни в основной массе. Плагноклаз вкрапленников существенно пелитизирован и серицитизирован. В последнем случае он диагностируется только по реликтам. Небольшие количества чешуек биотита также полностью хлоритизированы. Основная масса, полустекловатая или достаточно полно раскристаллизованная, имеет хорошую сохранность.

Толща пистынских конгломератов дислоцирована: разрыв отделяет внутреннюю (обращенную к Карпатам) часть этой толщи, поставленную вертикально, от внешней, где слои сохраняют горизонтальное положение. Возраст нарушений — посленижнесарматский, они возникли одновременно с надвигом Карпат на предгорье. Эти дислокации резко видоизменили предшествовавший рельеф, и, может быть, напрасно было бы искать в Карпатах долину той реки, которая размывала выходы изверженных пород. Однако положение древней дельты, характер аллювия и его большая мощность ясно говорят об энергичном размыве горной области, испытавшей поднятие.

К югу от пистынской дельты расположены Покутские Карпаты, которые в генетическом отношении представляют самостоятельную горную область. Они рассматриваются как наиболее поднятый участок флишевого фундамента Предкарпатского прогиба, с которого глубокий эрозионный срез удалил почти целиком мощную толщу моласс. Представляется вероятным, что именно из этой, отличной от других, части флишевых Карпат происходят описанные выше липариты и что проявление вулканизма следует связывать с разломом в фундаменте Предкарпатского краевого прогиба. В Покутских Карпатах изверженные породы не установлены, и мы предполагаем, что небольшие интрузивные тела липаритов, которые по ряду признаков не должны находиться на большом удалении от пистынской дельты, скрыты под надвигом Покутских Карпат на их предгорье или над надвигом Оровской чешуи на покутские складки.

Институт геологии полезных ископаемых
Академии наук УССР

Поступило
22 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Винчелл, Оптическая минералогия, М., 1949. ² О. С. Вялов Геологический журнал, 19, 6 (1959) ³ Н. Р. Ладыженский, Геология и газонефте-носность Советского Предкарпатья, Киев, 1955. ⁴ А. Я. Луккин, Тр. УкрНИГРИ 1, 57 (1959). ⁵ О. Ф. Ткаченко, Тр. УкрНИГРИ, 1, 79 (1959). ⁶ J. Obtułowicz, H. Teisseyre, Sprawozdanie ze zdjęć na obszarze przedgórza pokuckiego Lwów, 1935. ⁷ B. Świdorski, Sprawozd. Polsk. Inst. Geol., 4, 1—2, 313 (1927) ⁸ T. Wiśniowski, Kosmos, 24, 411, Lwów, 1899.

МИНЕРАЛОГИЯ

Д. П. СЕРДЮЧЕНКО и В. А. МОЛЕВА

ТИТАНИТЫ ИЗ АРХЕЙСКИХ ПОРОД ЮЖНОЙ ЯКУТИИ

(Представлено академиком Н. В. Беловым 7 I 1960)

Титанит в архейских породах Южной Якутии имеет широкое распространение. В кварц-полевошпатово-диопсидовых, в роговообманково-пироксеновых гнейсах, в диопсидо-скаполитовых сланцах с магнетитом, в диопсид-биотитовых гнейсах и в параамфиболитах с пироксеном и магнетитом титанит почти всегда присутствует. Неправильные или ячменно-образные зернышки и хорошо ограненные кристаллики титанита в этих породах то разбросаны в одиночку, то образуют гнездовидные агрегатные скопления, то вытянуты линейно, согласно сланцеватости пород, и своими прерывисто-пунктирными цепочками сопровождают диопсидовые или роговообманковые полосы, к которым в рудных зонах приурочены и зернистые выделения магнетита.

Часто можно наблюдать, что кристаллики титанита включены здесь в зеленую роговую обманку или в коричнево-красный биотит, — и тогда вокруг них образуются ясные или сильные плеохроичные ореолы.

Относительно много светло-коричневого титанита имеется в породах зоны инъекции, в мигматитах, образовавшихся в результате тонкослойного внедрения розовых аляскитовых гранитов в древние кристаллические сланцы. Титанит здесь образует мелкие (правильные) или довольно крупные (неправильные, лапчатые) зерна, которые преимущественно связаны с зеленой или зелено-синей роговой обманкой, а местами (вместе с магнетитом) являются продуктом ее гистерогенного разложения.

В зоне гранитов, в их эндоконтактах, в результате захвата и ассимиляции ими материала боковых пород также распространены полосчатые или пятнистые выделения диопсида, биотита, роговой обманки и титанита. В этих случаях вокруг включений светло-коричневого титанита в роговой обманке или в биотите образуются ясные или сильные (темные) плеохроичные ореолы (Сивагли, скважина № 22-С). Мелкие пятнистые агрегаты неправильных зернышек титанита, а также его призматические (конвертоидные) монокристаллы, значительные по размерам (до 2 см в длину) и легко видимые простым глазом, в ряде случаев приурочены к скарнообразным крупнозернистым скаполитовым и скаполито-диопсидовым породам рр. Неричи, Большой Саалах и др.).

В некоторых контакт-метасоматических (эпидотизированных, актинолизированных и хлоритизированных) магнетито-роговообманковых породах, прорванных жилообразными телами розового аляскитового гранита, также образуется довольно много агрегатных скоплений удлиненных кристалликов (до 0,15 мм) янтарно-красного титанита (кейльгауита), обладающего ясным плеохроизмом и окруженного в хлорите сильными плеохроичными ореолами (Сивагли, скважина № 19-С).

Повышенное количество титанита встречается также в самих железосодержащих скаполит-амфиболо-пироксеновых пачках на месторождениях Сивагли, Пионерское, Десс и др., где он в виде мелких удлиненных зернышек тяготеет к магнетиту и сопровождающей его роговой обманке.

На участках развития титанита ортит совсем или почти совсем отсутствует, но часто титанит в указанных выше осадочно-метаморфических породах и в эндоморфно измененных зонах гранитов находится в парагенезисе с апатитом, монацитом, оранжеитом.

Значительный интерес представляют крупнокристаллические участки розового аляскитового гранита на Тинском месторождении (канавка 26, образец № С-174/1951). Гранит этот чередуется здесь с неправильными по форме участками тонкозернистого розового гранита, но только в крупнозернистой его фации обнаружено довольно много призматических кристаллов титанита. Одни из них мелкие — длиной в несколько миллиметров, другие средние — от 0,8 до 1,2 см в длину, сравнительно редко встречаются и крупные кристаллы — до 3 см в длину. Зеленовато-черные с поверхности, они в изломе смоляно-черные, по форме обычно конвертовидные с развитием граней (111) и (110) или пластинчатые при развитии пинакоида (001); поперечные сечения ромбовидны; изредка встречаются параллельные сростки двух призматических кристалликов.

При микроскопическом изучении розовый сфенсодержащий гранит состоит из микроклин-пертита, кристаллические зерна которого сильно раздавлены и окварцованы, причем мелко- и среднезернистый мозаичный кварц пронизывает всю породу тончайшими жилочками. К этим жилочкам чаще всего и приурочены кристаллы титанита ($N_g \gg N_p \gg 1,783$; $2V = +30^\circ$), иногда примыкающие и непосредственно к полевым шпатам или частично в них включенные. Некоторые из кристаллов титанита разорваны вдоль трещинок, выполненных кварцем, а другие частично резорбированы, и в них имеются «заливы», заполненные тонкомозаичной кварцевой массой. Однако большинство крупных кристаллов титанита совершенно чистые и однородные, в шлифах они имеют светлую коричневатую окраску. Химический состав этого титанита приведен в табл. 1, А.

Таблица 1

Химический состав титанитов из архейских пород Южной Якутии

Компонент	А		Б		В	
	вес. %	мол. число	вес. %	мол. число	вес. %	мол. число
SiO ₂	30,50	508	29,75	493	29,40	490
TiO ₂	39,20	490	34,46	431	35,30	441
Al ₂ O ₃	0,88	9	2,00	20	2,60	25
Fe ₂ O ₃	Нет	—	Нет	—	1,04	6
TR ₂ O ₃	3,26	27	4,25	35	3,00	24
Nb ₂ O ₅	—	—	0,68	3	0,20	1
Ta ₂ O ₅	—	—	0,04	—	—	—
FeO	1,40	19	2,38	33	0,87	12
MgO	0,35	8	—	—	0,16	4
CaO	24,50	438	24,45	437	26,40	471
SrO	—	—	0,35	3	0,10	1
Na ₂ O	0,32	5	1,06	17	0,58	9
K ₂ O	—	—	0,10	1	—	—
F	—	—	Нет	—	0,10	5
+H ₂ O	—	—	0,60	33	0,53	30
—H ₂ O	—	—	—	—	0,09	—
Сумма	100,41		100,12		100,37	

Аналитик В. А. Молева.

Примечание. А. Темно-бурый со смоляным блеском и неровным изломом титанит в конвертообразных кристаллах из мелкозернистого гранита, образец № С-174, 1951 г.; р. Тин. Б. Красно-бурый со стекляннным блеском титанит в округло-уплощенных неправильных зернах из пироксенового инъекционного микроклин-пертитового гнейса (мigmatита): образец № 1005 из коллекции Л. В. Климова, р. Эмельджак. В. Светло-коричневый титанит в конвертообразных кристаллах со смоляным блеском в изломе из мелкозернистой диопсидо-скаполитовой (скарноподобной) породы; образец № С-19, 1953 г., р. Неричи.

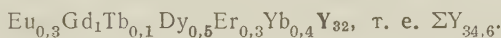
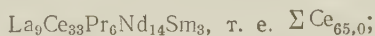
Крупные округло-уплощенные и неправильные по форме зерна темно-красного стеклянно-блестящего титанита из неравномерно слоистых мигматитов района р. Эмельджак имеют размеры от 1—2 мм до 2,5 см в поперечнике. Почти всегда титанит сростается с темно-зелеными призмами или агрегатами моноклинного пироксена. Под микроскопом титанит коричнево-красный, сильно трещиноват, нередко имеет правильноокруглую форму, ясно плеохроирует в розово-бурых тонах.

Главная масса породы представлена микроклин-пертитом, образующим неправильные сильно морщинистые зерна от многочисленных пластинчатых-волокнистых и веретеновидных вростков альбита. Кварц имеется в подчиненном количестве, часто в виде агрегатных микроскопических гнездышек.

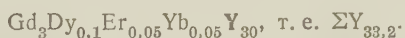
Анализ совершенно чистого однородного титанита из этой породы приведен в табл. 1,Б.

В скаполито-диопсидовых контакт-метасоматических скарнированных породах, расположенных вблизи гранитов среди кальцифиоров и часто содержащих значительное количество карбонатов, на месторождении Неричи (северная часть разведочной канавы № 12), а также в нижнем течении р. Большой Саалах имеются довольно мощные (до нескольких метров) неправильной формы участки, содержащие коричневые или коричнево-красные конвертовидные кристаллы титанита (до 1,0—1,5 см в длину). Минерал этот неравномерно распределен в породе, образуя то рассеянные выделения, то значительные гнездовидные и неправильно-линзовидные концентрации с содержанием титанита до 20—25 % по объему. Состав этого титанита приведен в табл. 1,В.

По анализу Р. Л. Баринского, распределение редких земель в составе титанита с р. Неричи (табл. 1,В) следующее:



Для титанита с р. Эмельджак (Б) имеем:



Таким образом, в составе TR_2O_3 отношение $\Sigma \text{Ce}_2\text{O}_3$ к $\Sigma \text{Y}_2\text{O}_3$ близко к 2:1.

Образование вокруг зерен титанита в слюдах и амфиболах плеохроичных ореолов (с радиусами 25; 34 и 43 μ) указывает на наличие в них ионов урана ($R_i = 1,05 \text{ \AA}$) и тория ($R_i = 1,10 \text{ \AA}$), которые, входя в состав титанита, занимают в его решетке места Са ($R_i = 1,06 \text{ \AA}$), совершенно аналогично тому, как такие же места Са в редкоземельных титанитах изоморфно замещаются иттрием с ($R_i = 1,06 \text{ \AA}$), церием ($R_i = 1,18 \text{ \AA}$) и их аналогами.

При изоморфной замене Са на TR и U, Th электростатическое равновесие системы сохраняется главным образом путем количественно и качественно различных и часто одновременных замещений, с одной стороны, в группе Са, с другой — в группе Ti. Совершенно отсутствуют или проявляются очень незначительно замещения в группе Si. Ограничено также замещение О, не входящего в кремнекислородные тетраэдры, равновеликими ионами (ОН) и F (см. (1)).

Кристаллохимическая формула редкоземельных и радиоактивных титанитов имеет вид:



Устойчивое содержание титанита в осадочно-метаморфических породах (различных парасланцах и парагнейсах), закономерное распределение его среди других породообразующих минералов этих пород в виде согласных

прерывистых струек и полосок, чередующихся с полосками других минералов, приуроченность его главным образом к цветным и рудным минералам (пироксенам, роговой обманке, магнетиту) — все это дает основание рассматривать титанит как сингенетичное метаморфическое образование, сформировавшееся за счет материала древних осадочных пород, от которых унаследованы им и редкие элементы.

Спорадическая концентрация относительно крупнокристаллического титанита в розовых гранитах, инъецирующих указанные выше осадочно-метаморфические породы, свидетельствует об его эндоконтактной природе, о собирательной его кристаллизации и выделении в гранитах за счет ассимиляции боковых пород. Исходным материалом для крупнозернистого титанита в мигматитах также являются, очевидно, содержащие мелкозернистый титанит древние осадочно-метаморфические породы, подвергшиеся тонкослойной гранитной инъекции.

При перекристаллизации биотито-роговообманковых гнейсов за счет разложения роговых обманок частично происходит выделение вторичных агрегатов титанита; последний местами образует вокруг титаномагнетита тонкие реакционные каемки.

Совет по изучению производительных сил
Академии наук СССР

Поступило
30 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. В. Белов, Очерки по структурной минералогии, 2, Минералогич. сборн., № 5, Львов, 1951, стр. 23.

М. Н. ИЛЬИНСКАЯ

ЦЕОЛИТИЗАЦИЯ ТУФОГЕННЫХ ПЕСЧАНИКОВ БЕРЕЗОВСКОЙ СВИТЫ

(Представлено академиком Н. М. Страховым 11 I 1960)

Детальная петрографическая обработка материалов, собранных И. В. Хворовой из березовской свиты нижнего карбона восточного склона Южного Урала, выявила широкое развитие очень интересных процессов замещения в породах вулканогенно-осадочных формаций. В частности, была обнаружена интенсивная цеолитизация туфогенных песчаников, развитых по берегам р. Самозванки, левого притока р. Урала, впадающего в Урал в 10 км ниже пос. Кизильского.

Березовская свита в бассейне р. Урала сложена чередующимися покровами кислых и основных эффузивов и туфов с подчиненным количеством песчаников, глинистых сланцев и кремнистых пород (¹). Среди них встречаются мощные пачки розовато-серых грубо- и среднезернистых неправильно плитчатых пород с хорошо выраженной слоистостью, которые образуют моноклинально падающую толщу с азимутом падения $265^\circ < 40^\circ$. В породах много растительного детрита, особенно хорошо заметного на поверхности плиток. Растительные остатки расположены иногда беспорядочно, иногда же можно видеть их однообразное расположение (рис. 1). Они ориентированы в юго-западном направлении — 200° (додислокационная ориентировка). Здесь встречаются также куски окаменелой древесины, размером до 1,5 м.

Эти породы описывались в поле как песчаники. Однако при изучении их под микроскопом выяснилось, что их следует отнести к перемытым туфам, подвергшимся сложным процессам вторичного изменения.

В проходящем свете видно, что порода почти нацело состоит из сферолитовых сростков, довольно плотно соприкасающихся друг с другом (рис. 2а, см. вклейку к стр. 108). В промежутках между сферолитами видны обломки кварца и полевого шпата (размером в среднем 0,1—0,5 мм) и вторичные минералы — хлорит, актинолит, зеленовато-бурые гидрослюда, эпидот, альбит, а также обилие гидроокислов железа. Распределение вторичных минералов неравномерно: обычно, если встречается много эпидота, остальные вторичные минералы почти отсутствуют. Сферолитовые сростки в грубозернистых разностях породы имеют диаметр 0,8—1 мм, при этом форма их округлая (рис. 2 в; см. вклейку к стр. 108); в менее грубых и в тонкослоистых разностях сферолиты имеют диаметр 0,2—0,4 мм, и форма их менее правильная. Мелкими сферолитами и гемисферолитами сложены обломки окаменелой древесины. В этом случае сохраняются, хотя и не очень ясные, остатки первичной органогенной структуры, выраженной чередованием полос, сложенных мелкими сферолитами и гемисферолитами, и полос, обогащенных гидроокислами железа.

Сферолиты образованы тончайшими сростками трех минералов: кварца, цеолита и гётита. Гётит встречается в виде мелких пылинок, идущих по радиусам от центра сростка к его периферии и подчеркивающих сферолитовую структуру сростка. К периферии они становятся крупнее, иногда они сливаются в сплошную непрозрачную массу, облекающую сферолиты или даже полностью заполняющую промежутки между ними. Два других ми-

нерала прозрачны, имеют близкое двупреломление, но заметно отличаются показателями преломления. В центре сферолитовых сростков часто можно видеть частично или полностью цеолитизированные мелкие обломки полевого шпата, размером 0,1—0,3 мм, сохранившие характерные очертания. Реже в центре сферолита встречаются мелкие обломки кварца, обычно они сильно корродированы цеолитом, образуя подобие микропегматитовой струк-

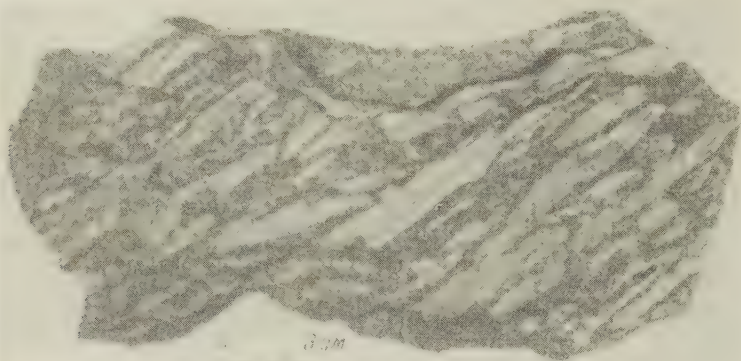


Рис. 1. Образец породы

туры. Такая же структура наблюдается и в краевых частях многих сферолитовых сростков. Редко в основной массе породы попадают более крупные обломки и кристаллы полевого шпата, размером 0,5—1,0 мм, которые цеолитизированы с периферии и по трещинкам (рис. 2г, см. вклейку к стр. 108). Реликты полевого шпата сохраняют подобие микроклиновой решетки, показатель преломления цеолитовой каймы меньше показателя преломления реликтов. Определения на федоровском столике для реликтов дали следующие константы: ($-2V = 82^\circ$; координаты: $N_g = 80^\circ$; $N_m = 81^\circ$; $N_p = 14^\circ$. Символ относительно спайности $[100]$, т. е. это микроклин.

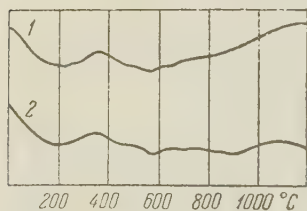


Рис. 3. Дифференциальные кривые нагревания. 1—образец № 717а; 2—образец № 717

При исследовании сферолитовых сростков при скрещенных николях наблюдается интересная особенность: сферолитовая структура почти полностью исчезает; во многих участках можно наблюдать волнистое угасание, но не сферолитового, а кварцевого типа. Кварц сферолитовых сростков строит свою кристаллическую решетку независимо от границ сферолитов, и получается подобие торцовой структуры кварцитов. Цеолит не подчиняется новой структуре, но он имеет двупреломление более низкое, чем у кварца,

слабо действующее на поляризованный свет, а поэтому цеолит почти не влияет на общую картину угасания. По общему облику породы при скрещенных николях можно предположить, что она образовалась при перекристаллизации халцедона, который был вначале составной, а может быть, основной составной частью сферолитовых сростков (рис. 2б, см. вклейку к стр. 108).

Большое внимание было уделено детальному изучению цеолита, входящего в состав сферолитовых сростков. Для этого были сделаны термический, спектральный и рентгеновский анализы, определены на федоровском столике и в иммерсионных жидкостях его оптические константы.

Так как порода почти нацело состоит из сферолитовых сростков, разделить которые на составляющие минералы было невозможно, приходилось для анализов брать породу целиком, а потом при расчетах учитывать заведомое присутствие в ней кварца и других минералов.

В результате термического анализа было установлено присутствие цеолитной воды (рис. 3).

Спектральный анализ, проведенный отдельно для основной массы породы с растительным детритом (образец № 717) и для окаменелой древесины (образец № 717а), дал следующие результаты:

№ образца	Si	Al	Mg	Ca	Fe	Mn	Ti	Na	K
717	≥10	3—10	0,03—0,1	0,3—1,0	3—10	0,1—0,3	0,1—0,3	1—3	1—3
717а	≥10	3—10	0,1—0,3	0,03—0,1	3—10	0,03—0,1	0,1—0,3	1—3	—

Из приведенных данных видно, что оба образца весьма сходны, но отличаются по содержанию Са и особенно, К. В шлифах из окаменелой древесины (образец № 717а) не установлено никаких реликтов К-полевого шпата и, напротив, в шлифах из основной массы породы (образец № 717), где эти реликты видны, анализ показал довольно высокое содержание К.

Рентгеновский анализ (расшифровка двух дебаграмм — образцы №№ 717а и 717 — с большой тщательностью проведена Т. В. Долматовой) подтвердил наличие в породе кварца, гётита и двух разновидностей цеолита для образца № 717:

1. Жисмондин $\text{Ca}_2\text{K}(\text{Al}_5\text{Si}_5\text{O}_{20}) \cdot 9 \div 10 \text{ H}_2\text{O}$ (²).
 2. Цеолит, не имеющий особого названия, но отмеченный в рентгенометрическом определителе В. И. Михеева (³), $(\text{Ca}, \text{Na}_2) \cdot (\text{Al}_2\text{Si}_3\text{O}_{10}) \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.
- В образце № 717а (окаменелая древесина) обнаружен второй цеолит, жисмондина нет.

В иммерсионных жидкостях были определены показатели преломления сферолитовых сростков: больший 1,540; меньший 1,533.

На федоровском столике установлено, что цеолит сферолитовых сростков — минерал двусосный, имеет отрицательное удлинение, прямое погасание и угол оптических осей $+2V = 34—42^\circ$. Жисмондин имеет $-2V = 66—77^\circ$.

Изученный материал показывает, что процессы вторичного изменения, окварцевания и цеолитизации туфогенных песчаников могут приобретать большой размах и коренным образом изменять первичный облик и первичную структуру породы.

Геологический институт
 Академии наук СССР

Поступило
 4 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. С. Либрович, Геологическое строение Кизило-Уртазымского района на Южном Урале, 1936. ² А. Г. Бетехтин, Курс минералогии, 1950. ³ В. И. Михеев, В. Н. Дубинина, Рентгенометрический определитель минералов, 1939.

ПЕТРОГРАФИЯ

Б. К. ПРОШЛЯКОВ и Ю. М. ВАСИЛЬЕВ

**ПЕТРОГРАФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПЕРМО-ТРИАСА
ПОЛУОСТРОВА БУЗАЧИ**

(Представлено академиком Н. М. Страховым 16 XII 1959)

Изучение геологического строения п-о. Бузачи имеет исключительное теоретическое и практическое значение. Выяснение геологии этого полуострова, являющегося связующим звеном между складчатыми сооружениями Урала, Тянь-Шаня, Мангышлака и Донбасса, проливает свет на характер и природу юго-восточного обрамления Русской платформы. Практическое значение изучения этой территории вытекает из ее близости к промысловым площадям Эмбенской нефтеносной области и Южно-Астраханского нефтегазоносного района.

В последнее время, благодаря значительным объемам буровых работ, выполненных на Бузачах трестом Мангышлакнефтегазразведка Западно-Казахстанского геологического управления, был получен новый, весьма ценный фактический материал, раскрывающий особенности геологического строения полуострова. Особый интерес в этом отношении представляют данные о глубинной геологии полуострова, в частности данные о петрографических особенностях, структуре и возрасте фундамента п-о. Бузачи.

Бурение глубоких разведочных скважин на Кызанской структуре (в центральной части п-о. Бузачи) было начато в 1958 г. Вопреки данным сейсмических исследований, согласно которым фундамент предполагался на глубинах порядка 2500 м, первая разведочная скважина на глубине 1350 м непосредственно из типичной сероцветной песчано-глинистой толщи средней юры вышла в уплотненные, местами сланцеватые, красноцветные породы неизвестного возраста.

Мощность красноцветной толщи оказалась значительной: скважина № 1, имея на 1 I 1959 г. забой 2250 м, еще не вышла из этих отложений. Мощность красноцветной толщи, таким образом, превышает 900 м.

Впоследствии красноцветные отложения были вскрыты и другими разведочными скважинами. Из скважины № 1 макроскопически и под микроскопом была изучена серия образцов из интервала 1300 — 2084 м. Образцы керна представлены в основном глинисто-алевритовыми красноцветными породами и реже серыми полимиктовыми среднезернистыми песчаниками. По изученным образцам выделяется три основных типа пород: песчаники, алевролиты, глины. Песчаники встречаются в виде среднезернистых песчаников с кальцитовым цементом и в виде мелкозернистого песчаника со смешанным кальцитово-хальцедоновым цементом.

Песчаник серый, среднезернистый. Плотный с кальцитовым цементом. Представлен полуугловатыми и полуокатанными частицами размером преимущественно 0,3 — 0,5 мм. Обломочный материал составляет до 85% всей породы. Минеральный состав обломочной части весьма однообразен. Наибольшее распространение имеет кварц (до 40 — 50% обломочной части), встречающийся в двух разновидностях — с равномерным и облачным угасанием (последний менее окатан). Затем следуют полевые шпаты, сильно каолинизированные и серицитизированные, и хал-

цедон; в небольшом количестве встречаются свежие, неразрушенные плагиоклазы, слюды, глауконит, хлорит. Характер упаковки обломочного материала — плотнейший. Пространство между обломочными частицами заполнено бесцветным монокристаллическим кальцитом, являющимся цементом породы. В некоторых песчаниках этого типа в небольшом количестве встречается халцедон, выполняющий, как и кальцит, роль цемента.

Песчаник серый, мелкозернистый. Плотный, со смешанным кальцитово-халцедоновым цементом. На 75—85% состоит из обломочного материала. Форма зерен преимущественно полуугловатая, исключая зерна кварца, которые частично регенерированы и поэтому имеют различную форму. Преобладающий размер зерен 0,1—0,35 мм. Среди обломочных частиц преобладают полевые шпаты, сильно разрушенные, каолинизированные и серицитизированные плагиоклазы, а также кварц (с обычным и облачным угасанием); реже встречаются обломочный халцедон и хлорит. В заметном количестве (до 4—5%) встречаются мелкие (0,02—0,04 мм) обломки гематита, свежие, не подвергшиеся процессам гидратации. В шлифах, при изучении под микроскопом, обломки гематита имеют четкие контуры, без бурых потеков.

Цементирующая часть породы представлена кальцитом и халцедоном. Содержание кальцита составляет 10—15%. Располагается он между обломочными частицами в виде мелких агрегатов и монокристаллов размером 0,05—0,1 мм.

Окварцевание песчаника произошло, по-видимому, в более позднюю стадию существования породы. В результате циркуляции кислых вод кальцит был частично заменен халцедоном, а зерна кварца — регенерированы.

Помимо описанных двух разновидностей песчаников встречаются также мелкозернистые песчаники, по минеральному составу и структуре похожие на вышеописанные, но с большей примесью алевритового материала (до 25—30%). Эти песчаники не являются широко распространенными в разрезе.

Алевролиты. Разнозернистые, мелкозернистые, обычно плохо отсортированные, сильно глинистые, красновато-коричневого цвета, в сухом виде легко скоблятся ножом, известковые или слабо вскипающие с 10% соляной кислотой. Излом неровный. Обломочный материал плохо отсортированный (размер частиц варьирует от <0,01 до 0,2 мм). Содержание его составляет 65—75%. Форма зерен преимущественно угловатая, реже полуугловатая. В обломочной части преобладают кварц, полевые шпаты и плагиоклазы, причем последние два очень мало затронуты процессом разрушения. В небольшом количестве встречается мусковит, частицы которого ориентированы в одной плоскости.

Кроме этих, типичных обломочных минералов, часто встречаются обломочные частицы гематита размером до 0,04 мм.

Цемент — базального типа, глинистый. Глина в данном случае представлена, по-видимому, не глинистыми минералами, а тонкоизмельченными обломочными частицами, в массе которых рассеяны окислы железа, придающие всей породе характерный розовато-коричневый цвет.

Встречаются алевролиты и несколько иного типа: розовато-коричневые, крупнозернистые, известковые, плотные. По тонким трещинам, ориентированным в вертикальной плоскости, наблюдаются выделения кальцита. Обломочный материал хорошо отсортирован, преобладающий размер частиц 0,05—0,1 мм, форма зерен в основном угловатая и полуугловатая. Минеральный состав обломков — кварц, преимущественно с облачным угасанием, сильно каолинизированные и серицитизированные полевые шпаты, халцедон, хлорит (минеральный состав такой же, как и у песчаника мелкозернистого). Часто встречаются обломочки гематита со следами воздействия на них пластовых вод. Цементирующая часть представлена среднекристаллическим кальцитом и глинистым материалом, равномерно пропитанным окислами железа и поэтому имеющим бурый цвет. Вообще под микроскопом

при скрещенных поляроидах порода имеет мозаичную окраску: бесцветные и черные зерна кварца, полевых шпатов, перламутровая окраска монокристаллов кальцита и бурая окраска глинистой части. Присутствие кальцита связано с эпигенетическим отложением его из подземных вод одновременно гидратировавших гематит.

Глины представлены исключительно розовато-коричневыми разностями, преимущественно бескарбонатными. Лишь один из образцов керна давал очень слабую реакцию с 10% соляной кислотой. Обломочный материал составляет 20—30% породы и представлен преимущественно угловатыми зернами кварца и редко полевым шпатом с частицами размером 0,01—0,04 мм. Много мелких ($\leq 0,01$ мм) обломочков гематита, рассеянных равномерно в породе. В небольшом количестве наблюдаются выделения кальцита размером 0,01—0,04 мм, а единичные скопления кальцита достигают 0,3 мм.

К этой же группе глин отнесены и смешанные глинисто-алевритовые красноцветные породы, состоящие на 50—65% из глинистых частичек и на 35—50% из алевритовых. Обломочный материал представлен угловатыми зернами преимущественно средне- и крупнозернистого алеврита (0,04—0,08 мм). Обломочный материал распределяется не всегда равномерно, в отдельных участках содержание его достигает 80% от общей массы породы. Минеральный состав обломочной части — кварц, реже полевые шпаты, единичные зерна мусковита и хлорита. Содержание кальцита в этих породах изменяется в широких пределах (3,5—20%). Как и во всех вышеописанных красноцветных породах, здесь в большом количестве присутствуют мелкие обломочки (до 0,03 мм) гематита.

В целом породы разреза скважины № 1 (в описываемом интервале) образовались в окислительных условиях, о чем свидетельствует повсеместное присутствие железа именно в окисной форме, а также отсутствие каких-либо органических остатков. Накопление осадочного материала происходило, вероятно, в континентальных условиях, соответствующих обстановке формирования фаций предгорных равнин. В пользу континентального происхождения описываемых пород говорит обилие обломочного гематита, не подвергшегося воздействию воды и неперешедшего в гидроокислы.

Несомненно, что в этих отложениях циркулировали подземные воды, из которых по трещинам и в пустотах между обломочными частицами отложился кальцит. Обращает на себя внимание тот факт, что наибольшим содержанием кальцита отличаются песчаники, несколько более низким — алевролиты и глинисто-алевролитовые породы, а самым низким глины (иногда и совсем не содержащие кальцита). Выделения халцедона и регенерация зерен кварца наблюдаются также исключительно в песчано-алевритовых породах. Это еще раз показывает, что присутствие хемогенных компонентов в породе связано со вторичными процессами, а не с отложениями их в момент седиментации. Именно в обломочных породах (песчаниках и алевролитах) могла происходить циркуляция вод, из которых выпадали кальцит и кремнезем.

Источником сноса обломочного материала являлись области развития метаморфических и осадочных пород. В пользу присутствия продуктов разрушения метаморфических пород говорит обилие зерен кварца с облачным угасанием и обломочного халцедона. Сильная разрушенность полевых шпатов и плагиоклазов, их серицитизация и каолинизация характерны для переотложенных осадочных частиц. Известковистые и окремневшие песчано-алевритовые породы красноцветной толщи в пределах кызанской структуры не являются в изученных образцах коллекторами, вследствие заполнения промежутков между обломочными частицами хемогенными выделениями и изоляции отдельных пор. На прилегающих территориях, где вторичных процессов выделения хемогенных компонентов не происходило, значения пористости и проницаемости могут иметь величины, представляющие практический интерес в нефтегазоносном отношении.

Сравнение минерального состава и петрографических особенностей характера залегания и стратиграфического положения красноцветной толщи п-о. Бузачи с аналогичными образованиями соседних районов показывает, что описываемые отложения имеют много общего с пермо-триасом Эмбенской нефтеносной области и каратауским комплексом Мангышлака. Они являются как бы переходным комплексом от явно метаморфизированных и дислоцированных отложений Каратау к спокойно залегающим рыхлым терригенно-обломочным образованиям Эмбенского района. Очевидно, красноцветная толща Бузачей имеет тот же возраст, что и аналогичные образования Эмбы и Мангышлака. Она может быть отнесена к пермо-триасу. Наиболее близким аналогом красноцветной толщи Бузачей являются красноцветные отложения Джанайской опорной скважины, Промысловской площади, южнее Астрахани, и некоторых пунктов, Прикумского района Предкавказья.

Формирование красноцветной толщи п-о. Бузачи происходило, по-видимому, в обстановке сложного рельефа внутри эпигерцинской складчатой области в переходный период — во время, когда геосинклинальный этап развития Урало-Сибирской области уже закончился, а платформенный этап развития со всеми его типичными особенностями еще не наступил.

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Поступило
12 XII 1959.

Член-корреспондент АН СССР Н. М. КАРАВАЕВ и Н. Ф. БУДЯК

ИССЛЕДОВАНИЕ ТАК НАЗЫВАЕМЫХ ГУМИНОВЫХ КИСЛОТ ПРЕСНОВОДНЫХ САПРОПЕЛЕЙ

Сапропелями, согласно существующим представлениям (¹⁻³), называются горючие ископаемые гнилостного происхождения, не содержащие гуминовых веществ, характерных для гумолитов (торфов, лигнитов, бурых и каменных углей). В руководстве по анализу и исследованию сапропелей (⁴) веществам, растворяемым в щелочи и осаждаемым кислотой, присвоено название гуминовых кислот. Такое противоречие требует уточнения, поскольку по современным представлениям принимается (⁵), что основной скелет гуминовых кислот включает ароматические полициклы.

Для выяснения природы так называемых гуминовых кислот сапропелей три образца последних, выделенные из сапропелей оз. Галич Костром-

ской обл., оз. Дисна ЛитССР, оз. Толполовское Ленинградской обл. растворами водной щелочи по принятой методике (⁴), были подвергнуты окислению перманганатом в щелочной среде (⁶). (Элементарный состав гуминовых кислот см. табл. 1.) Кислоты сапропелей оз. Галич и Толполовское были подвергнуты одноступенчатому окислению, оз. Дисна и Толполовское — многоступенчатому окислению с выводом и исследованием промежуточных продуктов окисления. В первом случае щелочной раствор продуктов окисления упаривался до небольшого объема, подкислялся, летучие кислоты отгонялись с паром; из остатка, полученного при выпаривании досуха были выделены экстракцией этиловым эфиром нелетучие кислоты.

Таблица 1

Озеро	Элементарный состав (в процентах на горюч. массу)			
	С,	Н,	Н,	О (по разности),
Галич	56,21	5,84	6,55	31,4
Толполовское	55,70	6,38	5,43	32,49
Дисна	52,0	6,0	Не опр.	

Таблица 2

Озеро	Нелетучие с паром кислоты		Н С (ат.)	Летучие с паром кислоты		Н С (ат.)
	С, %	Н, %		С, %	Н, %	
Галич	49,58	6,00	1,45	68,90	8,07	1,41
Толполовское *	48,20	6,10	1,52	75,10	11,77	1,90

* Из смеси нелетучих с паром кислот была удалена щавелевая кислота.

Состав полученных при окислении кислот был исследован методами хроматографии на бумаге (^{7, 8}), и.-к. спектроскопии, хроматографией на силикагеле (^{9, 10}). В табл. 2 представлен элементарный состав твердых лету-

чих с паром и нелетучих кислот, полученных при окислении кислот сапропелей. В табл. 3 приведены кислоты, обнаруженные в продуктах окисления методом хроматографии на бумаге и качественными реакциями. Ни в одном случае не были обнаружены труднорастворимые изо- и терефталевые и меллитовая кислоты. На рис. 1 представлены хроматограммы разделения смеси нелетучих кислот.

Специальными опытами было установлено, что фталевая кислота вымывается вместе с адипиновой 10% *n*-бутанолом в CHCl_3 . Поэтому фракция, извлекаемая 10% *n*-бутанолом, исследовалась на содержание фталевой кислоты. Титрование велось потенциометрически, без введения фенолфталеина, который дает качественную реакцию, аналогичную реакции на фталевую кислоту (образование флуоресцеина).

Из фракций, соответствующих отдельным пикам, после отгонки растворителя выделялись чистые кислоты, для которых был определен эквивалентный вес и количественное содержание их в смеси. Во всех случаях были обнаружены кислоты малоновая, янтарная, глутаровая, адипиновая и выше C_7 . Содержание фталевой кислоты при окислении кислот сапропелей оз. Галич составляет около 2%, оз. Толполовское — следы, оз. Дисна — фталевая кислота не обнаружена.

При многоступенчатом окислении на каждую ступень окисления брали $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{6}$ часть от расчетного количества перманганата. По окончании реакции твердая фаза отфильтровывалась и обрабатывалась SO_2 для растворения окислов марганца. Нерастворимые продукты окисления вводились в следующую ступень окисления. При подкислении щелочного фильтрата выпадали труднорастворимые в кислой среде промежуточные продукты окисления в виде светло-желтых хлопьев. Фильтрат после удаления последних исследовался обычным методом. Данные по исследованию промежуточных кислот, полученных при окислении кислот сапропеля оз. Толполовское (табл. 4), указывают на их алифатическую или алициклическую природу.

По мере углубления процесса окисления атомарное отношение Н:С повышается и на IV ступени оно близко к отношению для кислот предельного ряда. Это является указанием на то, что в основе так называемых гуминовых кислот сапропелей заложена алифатическая или алициклическая структура. Снятые для подтверждения данных химического анализа и.к. спектры для образцов нелетучих продуктов окисления кислот сапропелей оз. Галич и Толполов-

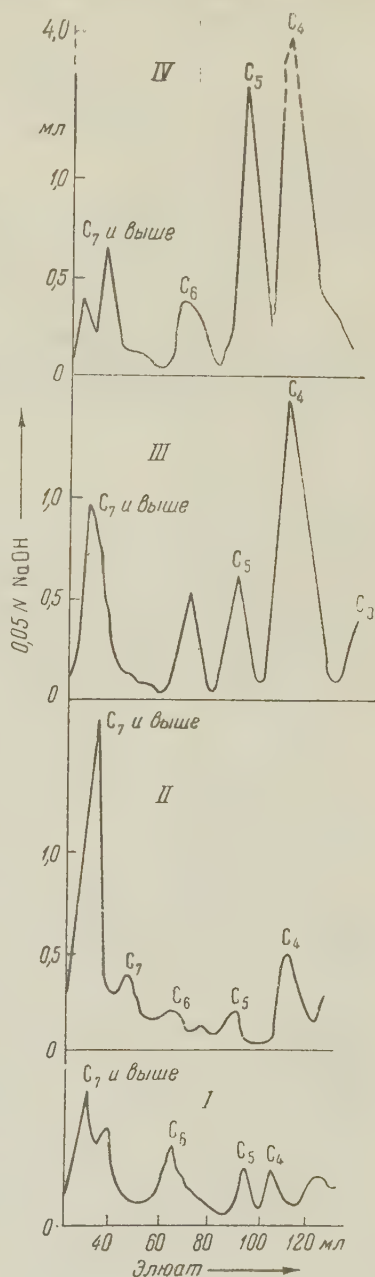


Рис. 1. Хроматограммы разделения на силикагеле двухосновных кислот, полученных при окислении гуминовых кислот сапропелей: I — оз. Толполовское, II — оз. Дисна (одноступенчатое окисление), III — оз. Галич, IV — оз. Толполовское (многоступенчатое окисление)

Озеро	Метод окисления	Летучие с паром кислоты	Нелетучие с паром кислоты
Галич	Одноступенчатое окисление	Уксусная, масляная, выше C_7	Щавелевая, янтарная, глутаровая, адипиновая
Толполовское	То же	Уксусная, масляная, выше C_7 до C_{16}	Щавелевая, янтарная, адипиновая, возможно о-фталевая (следы)
Дисна	Многоступенчатое окисление	Муравьиная, уксусная, пропионовая, масляная и высшие. (Т. пл. 50—57°)	Щавелевая, янтарная, адипиновая, следы бензойной

ское были почти идентичны и характеризовались следующими максимумами поглощения: 5,9 μ группа $—C=O$ в карбоксиле; 6,9 μ и 7,25 μ группы $—CH_2—$ и $—CH_3$; 8,55 μ $—C—O—C—$ алифатические эфиры; 9,0 μ —

Таблица 4

Степень окисления	Элементарный состав				Атом. отн.	Эквивалентный вес	Формула, соотв. эквиваленту
	C, %	H, %	N, %	O, %			
Исходн. кислоты	55,70	6,38	5,43	32,49	1,35		
II	59,30	7,86	5,08	27,76	1,59	337	$C_{15}H_{25}O_{3,9}N_{1,2}COOH$
III	64,50	9,50	4,47	21,23	1,78	500	$C_{26}H_{46,5}O_{4,6}N_{1,7}COOH$
IV	64,20	9,60	2,57	23,63	1,79	250	$C_{12}H_{23}O_{1,7}N_{0,45}COOH$

ангидриды кислот; 9,35 μ — циклические эфиры; 12,4 μ — $(CH_3)_2C$. Спектры показали отсутствие полос, характерных для ароматических $—C=C—$ и $C—N—$ связей.

Если бы кислоты сапропелей были одинаковы с гуминовыми кислотами гумолитов, построенных из циклических ароматических ядер, более устойчивых к окислителям, за исключением производных фенолов, мы получили бы при окислении помимо щавелевой кислоты различные бензолкарбоновые кислоты, которые обычно получают при окислении гуминовых веществ (^{11,12}). Нами они обнаружены в ничтожных количествах. Кроме того, при ступенчатом окислении гумолитов всегда наблюдалось сильное снижение содержания водорода и атомарного отношения $H:C$. Очевидно, надо вещества, извлекаемые из сапропелей щелочными растворами и осаждающиеся при подкислении, выделить в особую группу природных веществ, присвоив им название сапрокислоты.

Институт горючих ископаемых
Академии наук СССР

Поступило
13 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Потонье, Происхождение угля и других каустобиолитов, М., 1934.
- ² W. Fuchs, Die Chemie der Kohle, Berlin, 1931.
- ³ Г. Л. Стадников, Происхождение углей и нефти, Изд. АН СССР, 1937.
- ⁴ Методика изучения сапропелевых отложений, Изд. АН СССР, 1953.
- ⁵ Т. А. Кухаренко, Генезис твердых горючих ископаемых, Изд. АН СССР, 1959, стр. 319.
- ⁶ A. V. B. P. e, Proceed. Roy. Soc., 127, 480 (1930).
- ⁷ F. A. Ischerwood, The biochem. J., 55, 824 (1958).
- ⁸ Kurt Günter Beck, Brennstoff-Chemie, № 17/18, 275 (1954).
- ⁹ C. S. Marvel, R. D. Rands, J. Am. Chem. Soc., 72, 2642 (1950).
- ¹⁰ А. С. Фомина, А. Я. Побуль, Изв. АН ЭССР, 2, № 4, 551 (1953).
- ¹¹ A. N. Roy, H. C. Howard, J. Am. Chem. Soc. 5, 3239 (1952).
- ¹² R. F. Hein, E. D. Besser, R. G. White, Ind. and Eng. Chem., 49, № 4, 737 (1957).

Член-корреспондент АН СССР И. Е. СТАРИК, Л. Я. АТРАШЕНОК и А. Я. КРЫЛОВ

О РАДИОАКТИВНОМ РАВНОВЕСИИ В ГРАНИТАХ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЯНЬ-ШАНЯ

До недавнего времени все определения содержания урана и тория в изверженных горных породах производились косвенным, эманационным методом по Ra и ThX, что справедливо лишь при наличии радиоактивного равновесия. Надежные прямые методы определения их малых количеств до последнего времени отсутствовали.

В связи с разработкой люминесцентного метода определения урана в породах и с накоплением данных по определению радиоактивного равновесия в водах, донных осадках и в зонах рудных месторождений появилась тенденция отрицать радиоактивное равновесие в породах и, следовательно, ставить под сомнение любые определения радиоактивных элементов, произведенные косвенными методами (¹). Принципиально эти соображения правильны, но, вероятно, для большинства изверженных и метаморфических пород сильно преувеличены. Этот вопрос имеет большое значение, так как, с одной стороны, от его решения зависят наши представления о подвижности радиоактивных элементов в изверженных породах в зоне гипергенеза, а с другой — могут оказаться непригодными все полученные ранее радиохимическим методом данные по содержанию U и Th в породах.

Для определения малых количеств тория пока нет простых и надежных методов, что увеличивает значение радиохимического анализа.

Различные косвенные соображения о радиоактивном равновесии в изверженных горных породах спорны. Единственным надежным критерием является сравнение результатов прямого определения урана и вычисленного его содержания по радию. В качестве такого примера рассмотрены гранитоиды Центрального Тянь-Шаня.

Вследствие того, что химические методы определения малых содержаний урана (10^{-6} — 10^{-7} г/г) недостаточно чувствительны, пока известно сравнительно небольшое количество данных о содержании урана, которые в сочетании с данными содержания радия позволили бы судить о постоянстве отношения Ra к U в гранитоидах.

Для прямого определения урана мы применили люминесцентный метод. Интенсивность люминесценции урансодержащих перлов измерялась на фотометре. Выделение урана из образцов осуществлялось методом экстракции диэтиловым эфиром. Навеска 0,2—0,5 г разлагалась HF + HNO₃ при слабом нагревании; HF удалялась выпариванием с HNEз. В случае неполного разложения остаток подвергался дополнительному разложению. Из азотнокислого раствора аммиаком без CO₂ осаждались полуторные окислы, осадок отфильтровывался и растворялся в 10% HNO₃. После выпаривания раствора до 25—30 мл из него экстрагировался уран. В качестве высаливающего агента применялся NH₄NO₃. Очищенный раствор уранилнитрата, выделенный из породы, переводился в платиновый тигель, выпаривался почти досуха, к нему прибавлялось несколько капель HF и определенное количество NaF, который затем высушивался, проплавлялся. Плав растирался, и из порошка, как и при приготовлении стандартов, готовились перлы.

Полнота выделения U контролировалась с помощью U^{233} . Применяемые реактивы были предварительно очищены перегонкой или перекристаллизацией и проверены на отсутствие в них измеримых количеств U.

При более высоком содержании урана в породах и минералах (не меньше $1 \cdot 10^{-3}\%$) применялось количественное люминесцентное определение урана без отделения его от сопутствующих элементов (4). Навеска породы или минерала в платиновом тигле сплавлялась с известным количеством NaF до момента полного расплавления. Если сплавления с NaF было недостаточно для полного разложения образца, то применялась смесь NaF с другими плавнями или же образцы предварительно разлагались иным путем. Плав по охлаждению полностью извлекался из тигля и тщательно растирался. Тигель с плавом взвешивался до и после сплавления. Из порошка далее готовились перлы.

При применении прямого люминесцентного метода результаты получены как из параллельных плавок, так и из плавок, полученных путем различного разбавления образца фтористым натрием (1, 5).

Радий определялся по известной методике переведения породы в раствор и соосаждения Ra и ThX в виде сульфата с барием (3). Для суждения о наличии или отсутствии радиоактивного равновесия в породах необходимо указать точность полученных результатов. При достаточной разработке люминесцентного метода и улучшении качества измерительной аппаратуры точность этого метода достигает 3—5%. Одним из возможных способов повышения точности определения средней величины является увеличение числа измерений. В нашей работе это было учтено, и для каждого образца и эталона производилось измерение не менее 30—70 перлов. Хотя разброс в отдельных случаях достигал 20%, точность полученных средних значений (при уверенности 90%) около 5%. В некоторых случаях она может быть даже несколько выше. Точность определения урана методом прямого сплавления (без отделения газителей) для большинства пород и минералов составляет около 10% (1, 5, 6).

Результаты радиохимических определений урана в породах с концентрацией $(1 \div 5) \cdot 10^{-4}\%$ около 7—10%. При больших концентрациях Ra точность несколько выше — порядка 5%, может достигать 1—2%.

Таким образом, в нашем случае оценивать радиоактивное равновесие в ряду урана для пород мы можем в пределах ± 10 —12%, а для акцессорных минералов в пределах ± 10 —20%.

В табл. 1 приводятся результаты определения урана в пробах. В случае различных гранитов и сиенитов (хорошей сохранности) можно констатировать наличие радиоактивного равновесия в пределах указанной точности.

В первых четырех пробах продуктов разрушения гранитоидов (табл. 1) также отмечается радиоактивное равновесие, в двух последних оно резко сдвинуто в сторону обогащения радием. Данные, приведенные в этом разделе, безусловно не могут претендовать на какое-то решение вопроса в общем виде. Условия миграции радиоактивных элементов в продуктах распада гранитов сложны и многообразны, и приведенные данные являются иллюстрацией некоторых частных случаев. Для делювия вполне возможны резкие сдвиги радиоактивного равновесия в сторону обогащения радием, что понятно исходя из особенностей и различия химизма радия и урана в поверхностных водах. Это вопрос специальный, который мы здесь не рассматриваем.

По-видимому, наиболее общие представления о закономерном сдвиге радиоактивного равновесия в тех или иных типах пород можно получить при анализе сборных пород. В табл. 1 приведено четыре таких анализа. Пробы собраны с площади в несколько тысяч квадратных километров. Каждая из них составлена из 1500—2000 штучков. В данном случае мы, вероятно, можем установить общую доминирующую закономерность в преобладании Ra или U.

Таблица 1

Порода	Место взятия	Содержание U		Отклоне- нис, %
		люминесц. метод	радиохим. метод	
Свежие граниты и сиениты U, $\mu\cdot 10^{-3}$ %				
Серые порфировидные каледонские граниты	Барскаун	$0,30 \pm 0,01$	$0,29 \pm 0,02$	-5
	»	$1,3 \pm 0,1$	$1,5 \pm 0,1$	+15
	Джуука	$0,31 \pm 0,02$	$0,28 \pm 0,03$	-10
Красные аляскитовые каледонские граниты	Джеты-Огуз	$1,6 \pm 0,2$	$1,5 \pm 0,2$	-6
	»	$2,0 \pm 0,3$	$1,8 \pm 0,2$	-10
	»	$1,9 \pm 0,3$	$1,7 \pm 0,2$	-10
	»	$1,8 \pm 0,1$	$1,7 \pm 0,2$	-6
Гранит-порфир	»	$1,8 \pm 0,2$	$1,7 \pm 0,2$	-6
Сиенит герцинский	Ортокой	$2,5 \pm 0,3$	$2,5 \pm 0,3$	0
	Кастек	$0,43 \pm 0,01$	$0,41 \pm 0,03$	-5
Гранит аляскитовый герцинский	Кок-Майнок	$2,2 \pm 0,3$	$2,1 \pm 0,2$	-5
	Ортокой	$3,2 \pm 0,3$	$2,8 \pm 0,3$	-12
Продукты разрушения гранитоидов. U, $\mu\cdot 10^{-4}$ %				
Сиенит сильно выветрелый	Костек	$4,70 \pm 0,11$	$4,71 \pm 0,35$	0
Сиенит коагелизованный	»	$4,12 \pm 0,13$	$3,77 \pm 0,27$	-8
Гранит эпидотизированный (древняя кора выветривания)	Джеты-Огуз	$5,78 \pm 0,24$	$5,71 \pm 0,38$	-1
Песок аркозоый прибрежный	Иссык-Куль	$3,93 \pm 0,15$	$4,06 \pm 0,28$	+3
Делювий серого порфировидного гранита (фракция 0,5—0,3 мм)	Барскаун	$1,66 \pm 0,09$	$3,61 \pm 0,27$	+117
То же (фракция 0,3—0,1 мм)	»	$2,81 \pm 0,15$	$4,99 \pm 0,15$	+77
Сборные пробы. U, $\mu\cdot 10^{-4}$ %				
Гранит серый	Терской-Алатау	$3,58 \pm 0,05$	$3,72 \pm 0,26$	+4
Гранит аляскитовый	»	$5,16 \pm 0,12$	$5,75 \pm 0,38$	+11
Гранит герцинский	»	$5,61 \pm 0,18$	$5,26 \pm 0,20$	-6
Древнечетвертичные отложения	Центральный Тянь-Шань	$2,76 \pm 0,08$	$3,02 \pm 0,18$	+9

Первые три пробы представлены главными разновидностями гранитов Центрального Тянь-Шаня. Последняя — сборная проба древнечетвертичных образований (современные осадки не рассматриваются). Эта проба взята как тип рыхлых отложений, представляющих собой главным образом продукты разрушения рассмотренных выше гранитов.

Как видно из табл. 1, во всех этих породах в среднем наблюдается радиоактивное равновесие в ряду урана (в пределах точности наших определений). Весьма условно можно отметить небольшую тенденцию к обогащению пород радием в некоторых типах пород. Но если такое обогащение и есть, то оно относительно мало и вряд ли превышает 10%.

Можно провести косвенную проверку радиоактивного равновесия в породах по акцессорным минералам. Известно, что основная масса радиоактивных элементов в гранитах сосредоточена в акцессорных минералах. Следовательно, наличие или отсутствие равновесия в этих минералах будет в значительной мере определять и равновесие в гранитах.

В настоящее время накопилось много данных по определению абсолютного возраста свинцовым методом акцессорных минералов и их аналогов из пегматитов. Как правило, эти определения дают согласованные и геологически оправданные значения. Это может быть только при наличии радиоактивного равновесия в исследуемых минералах в течение всего геологического времени их существования и во всем ряду распада от урана до свинца. Можно это положение проверить прямым путем, сравнивая содержание урана, определенное в акцессорных минералах люминесцентным методом и вычисленное по радю.

Некоторые из таких данных приведены в табл. 2, из которой видно, что во всех случаях радиоактивное равновесие в ряду U—Ra примерно сохраняется в пределах точности методов определения (10—15%). Следует оговориться, что равновесие в акцессорных минералах не характеризует

Минерал	Содержание U, $n \cdot 10^{-2} \%$		Отклонение, %	Минерал	Содержание U, $n \cdot 10^{-2} \%$		Отклонение, %
	люминесц. метод	радиохим. метод			люминесц. метод	радиохим. метод	
Циркон I	$0,57 \pm 0,06$	$0,63 \pm 0,03$	+10	Монацит VI	$24,0 \pm 2,0$	$21,0 \pm 1,5$	-12
Циркон II	$0,21 \pm 0,03$	$0,20 \pm 0,01$	-5	Монацит VII	$4,5 \pm 0,2$	$5,0 \pm 0,2$	+11
Циркон III	$0,52 \pm 0,07$	$0,53 \pm 0,03$	+2	Монацит VIII	$17,5 \pm 1,5$	$16,6 \pm 0,9$	-5
Циркон IV	$2,4 \pm 0,3$	$2,6 \pm 0,2$	+8	Сфен I	$2,9 \pm 0,2$	$2,8 \pm 0,1$	-3
Малакон	$7,2 \pm 0,2$	$7,0 \pm 0,3$	-3	Сфен II	$1,9 \pm 0,1$	$1,8 \pm 0,1$	-5
Монацит I	$3,1 \pm 0,5$	$3,4 \pm 0,2$	+10	Ортит I	$2,6 \pm 0,1$	$3,0 \pm 0,2$	+16
Монацит II	$6,6 \pm 0,5$	$6,9 \pm 0,3$	+5	Ортит II	$1,5 \pm 0,3$	$1,7 \pm 0,1$	+13
Монацит III	$13,0 \pm 1,0$	$13,0 \pm 0,6$	0	Торит I	$31,5 \pm 4,1$	$34,0 \pm 1,7$	+15
Монацит IV	$3,2 \pm 0,1$	$3,1 \pm 0,2$	-3	Торит II	$76,0 \pm 7,6$	$72,0 \pm 3,5$	-5
Монацит V	$19,0 \pm 2,0$	$20,0 \pm 1,0$	+5	Апатит	$0,45 \pm 0,02$	$0,53 \pm 0,03$	+6

всю породу. Более того, наиболее подвижные формы U и Ra скорее приурочены к породообразующим минералам, но количественное соотношение этих форм, как и само существование значительных количеств подвижных форм урана в свежих, не измененных наложенными процессами гранитах, весьма дискуссионно (2).

В качестве общего заключения можно отметить, что в свежих сохранившихся гранитах, не измененных постмагматическими процессами, радиоактивное равновесие в ряду U—Ra существенно не нарушено. В рассмотренном случае гранитов Центрального Тянь-Шаня оно вряд ли сдвинуто более чем на 10%. Следовательно, в указанных пределах точности метод радиохимического анализа можно применять для определения урана в гранитах.

Для более точного и широкого выяснения данного вопроса необходимы тщательные и трудоемкие работы с применением новых, еще мало освоенных методов.

Поступило
2 II 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Я. Атрашенок, Л. Л. Волошенко, А. Я. Крылов, Люминесцентный метод определения урана без отделения гасителей, Тр. Рад. инст. им. В. Г. Хлопина АН СССР, 7, 126 (1956). ² А. Я. Крылов, Л. Я. Атрашенок, Геохимия, № 3, 246 (1959). ³ И. Е. Старик, Е. С. Щепотьева, Методы определения радиоактивности природных образований, М., 1946. ⁴ И. Е. Старик, М. М. Шац, Геохимия, № 2 (1956). ⁵ И. Е. Старик, Л. Я. Атрашенок, А. Я. Крылов, Геохимия, № 8, 39 (1956). ⁶ И. Е. Старик, Л. Я. Атрашенок, А. Я. Крылов, ДАН, 111, № 3, 644 (1956). ⁷ Ядерная геология, ИЛ, 1956, стр. 105.

Г. П. ГЕОРГИЕВ и Ю. С. ЧЕНЦОВ
О СТРУКТУРЕ КЛЕТОЧНОГО ЯДРА

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ЭЛЕКТРОННОМИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ИЗОЛИРОВАННЫХ ЯДЕР**

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 20 XI 1959)

До настоящего времени вопрос об ультраструктуре клеточного ядра остается во многом неясным. Электронномикроскопическое изучение клеточных ядер позволило обнаружить в них микрофибриллы диаметром 100—200 Å, соответствующие, по-видимому, молекулам дезоксирибонуклеопротейда (ДНП) ⁽¹⁾. Было показано также, что ядрышки имеют волокнистое строение, причем волокна содержат многочисленные мелкие гранулы ^(2,3). Однако сведения относительно структуры хроматина (хромосом), соединения в них молекул ДНП ⁽⁴⁾, взаимосвязей ядрышек и хромосом весьма ограничены. В работах Збарского и Георгиева ^(5, 6) и Георгиева ^(7, 8) было показано, что солевое фракционирование ядер позволяет избирательно извлекать материал той или иной структуры ядра. Исходя из этого, мы попытались подойти к пониманию структурной организации ядер путем электронномикроскопического анализа результатов экстракции ядер соответствующими растворителями, а также после действия нуклеаз. Использование изолированных ядер удобно для всевозможных экспериментальных воздействий.

Объектом исследования служили ядра, изолированные из печени крысы сахарозно-глицерофосфатным методом ⁽⁹⁾. Фиксацию вели 1 % OsO₄ в той же самой солевой среде, в какой перед этим были ядра; pH среды доводился до 7,2 глицерофосфатом натрия. Ядра заключались в смесь бутилметакрилата и метилметакрилата, срезы изготовлялись на микротоме Шестранда. Исследование срезов производилось на электронном микроскопе УЭМ-100.

Электронномикроскопическая картина изолированных клеточных ядер (рис. 1 а) аналогична таковой в материале, фиксированном в виде тканевого блока. Если фиксацию вели по Шестранду ⁽¹⁰⁾, то ядрышки имели обычный вид, характерный для ядрышек печени крысы ⁽²⁾; если ядра фиксировали 1 % OsO₄ в сахарозе, то в ядрышках четко выявлялись тонкие нити диаметром около 100 — 150 Å с гранулами на них (рис. 1 б). Вся структура ядрышек была при этом более рыхлой, хроматин и ядерный сок не обособлены и содержат гомогенно распределенные нити и гранулы примерно одинакового диаметра (100 — 200 Å).

Экстракция 0,14 М NaCl, удаляющая ядерный сок ⁽⁵⁻⁷⁾, ведет к структурированию хроматина (рис. 1 в). Скопления материала последнего часто примыкают к оболочке ядра. В скоплениях также выявляются нити, расположенные в разных направлениях. Часто несколько нитей лежат параллельно друг другу в направлении, перпендикулярном оси скопления материала. 0,14 М NaCl вызывает многочисленные разрывы ядерной оболочки, которые можно непосредственно наблюдать в электронном микроскопе. Эти разрывы ведут к тому, что последующее удаление ДНП 2 М NaCl полностью разрушает ядро, и остающиеся после этой обработки структуры ядра располагаются в осадке совершенно хаотично.

Поскольку разрушение ядра затрудняет идентификацию компонентов, мы исключили предварительную экстракцию 0,14 М NaCl и сразу обрабатывали изолированные и суспендированные в сахарозно-глицерофосфате яд-

ра 2—2,5 М NaCl. При этом ДНП удаляется, но оболочка остается целой и ядра сохраняют свою форму (рис. 1 з). В ядрах хорошо видны ядрышки, часто прижатые к оболочке, но сохранившие свою структуру. Кроме ядрышек и оболочек выявляются образования, имеющие осевую нить, во многих местах или целиком усеянную мелкими гранулами. Структуры последнего типа мы называем «нуклеонемами»: Как следует из описания, структура нуклеоном близка к строению волокон ядрышек. Они, как правило, смяты и тесно прилегают (за редким исключением) к ядерной оболочке. Такие смятые нуклеонемены могут быть обнаружены в световом микроскопе и, по-видимому, соответствуют структурам, названным «остаточными хромосомами» (⁵, ⁸, ¹¹, ¹²). Последующая обработка 0,14 М NaCl не удаляет материала ядрышек и нуклеоном.

Далее мы исследовали структуру ядра после действия дезоксирибонуклеазы (ДНКазы) в сахарозно-глицерофосфатной среде без Mg^{2+} . Если после действия ДНКазы ядра фиксировали OsO_4 в 0,14 М NaCl, выявлялась следующая картина (рис. 1 д). В ядре хорошо видна свободная от гранул оболочка. Ядрышко конденсировано, по границе его проходит тонкий слой более плотного материала. Наибольший интерес представляют нити толщиной около 600—900 Å, свободно лежащие в ядре. Эти нити тоже имеют периферические уплотнения. Там, где срез прошел вдоль оси нити, по ее середине видно, что уплотнения имеют правильное чередование, и на основании анализа картины можно предполагать, что они образуют две спирально выходящие вдоль нити пластины, лежащие одна напротив другой. Эти нити, которые вследствие периферического уплотнения значительно толще, чем нуклеонемены, связаны с оболочкой, иногда лежат вдоль нее и переходят в волокна ядрышек.

Если ядра после обработки ДНКазой фиксировали OsO_4 в сахарозе, то периферические уплотнения отсутствовали и нити имели меньший диаметр, представляя таким образом типичные нуклеонемены. Нуклеонемены, как уже указывалось, переходят в волокна ядрышек, которые имеют сходное строение.

Наконец, ядра после действия ДНКазы обрабатывали 2 М NaCl или сначала 0,14 М NaCl и после этого 2 М NaCl. В обоих случаях получена сходная картина (рис. 1 е, ж). Ядра остаются целыми, хотя и довольно сильно сжаты. В них видны ядрышки и нуклеонемены, причем многие из них лежат свободно в ядре и оболочка, как правило, хорошо выявляется в виде двуслойной мембраны, лишенной каких-либо гранул. В этих случаях нуклеонемены представлены также нитями толщиной 100—150 Å, на которых расположены гранулы диаметром 100—200 Å. На этих препаратах очень ясно видно, что ядрышки состоят из волокон, аналогичных нуклеонемам, образующих довольно плотный клубок. Хорошо видно, как нуклеонемены переходят в ядрышко и как они прикрепляются к оболочке ядра. То, что сходные картины строения нуклеоном и ядрышек выявляются в различных условиях, говорит о малой вероятности артефакта, хотя, конечно, это и нуждается в дальнейшей тщательной проверке.

На основании анализа полученных нами картин и некоторых литературных данных (⁴, ⁵, ⁸) мы предлагаем следующую гипотезу строения интерфазного клеточного ядра (см. рис. 2). Ее главные положения следующие.

1. Основными структурными элементами ядра являются: а) ядерная мембрана, б) нитевидные молекулы дезоксирибонуклеопротеида и в) нуклеонемены (нитевидные образования с сидящими на них гранулами, видимо, рибонуклеопротеидной природы).

2. Нуклеонемены представляют собой, по-видимому, осевую структуру хроматина и прикрепляются к ядерной мембране. Клубок нуклеоном образует ядрышко.

3. Нити ДНП прикрепляются к нуклеонемам, образуя в комплексе материал хроматина. Нити ДНП, прикрепляющиеся к нуклеонемам ядрышка, лежащим на его поверхности, образуют околядрышковый хроматин.

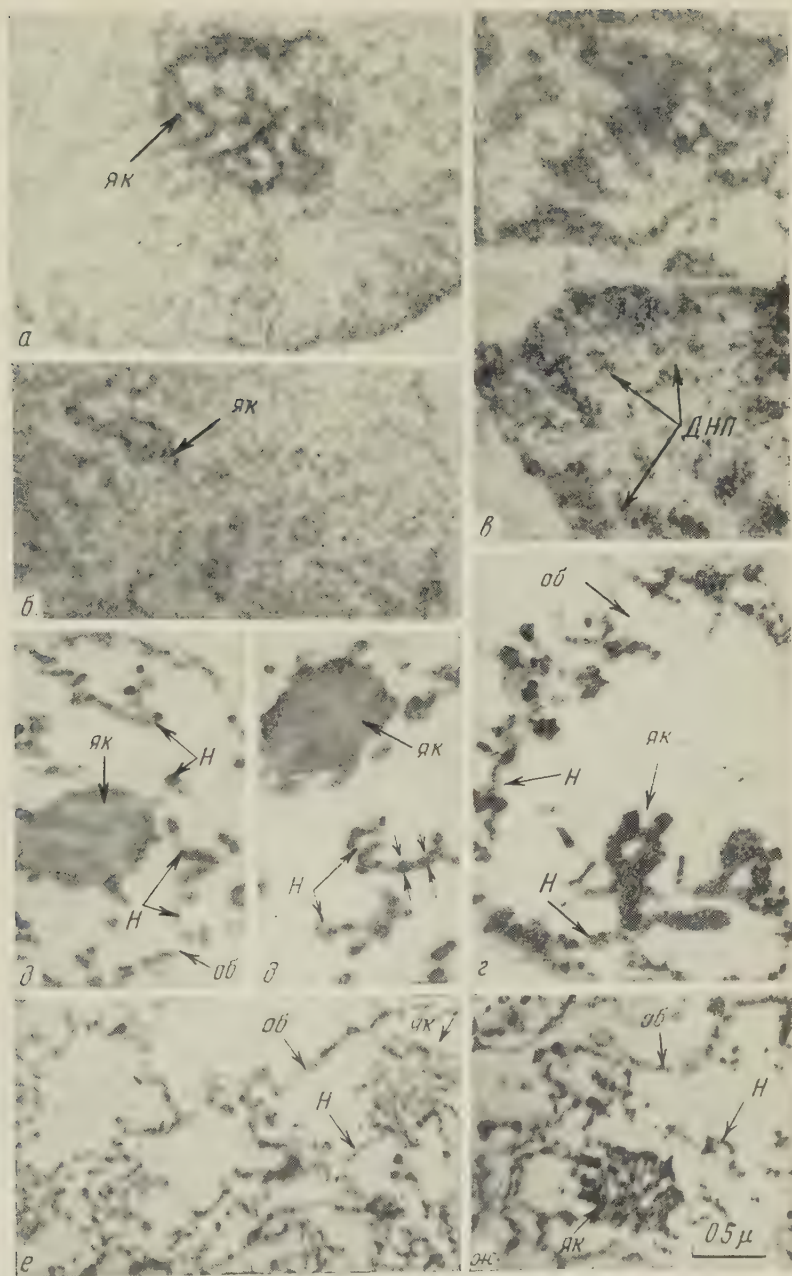


Рис. 1. Изолированные ядра печени крысы, 20 000 \times . а — фиксация по Шестранду; б — фиксация осмием в сахарозе с глицерофосфатом; в — экстракция 0,14 М NaCl, фиксация OsO₄ в 0,14 М NaCl; г — экстракция 2 М NaCl, фиксация OsO₄ в 2 М NaCl; д — обработка ДНКазой, фиксация OsO₄ в 0,14 М NaCl; е — обработка ДНКазой и экстракция 0,14 М NaCl и далее 2 М NaCl, фиксация OsO₄ в 2 М NaCl; ж — обработка ДНКазой и экстракция 2 М NaCl, фиксация OsO₄ в 2 М NaCl.
 н — нуклеомемы, ДНП — нити ДНП, як — ядрышко, об — оболочка ядра

4. Пространство между нитевидными структурами ядра (нитеями ДНП и нуклеонемами) заполнено гранулами и растворимыми белками ядерного сока.

Приведенная гипотеза хорошо объясняет имеющиеся данные по ультраструктуре клеточного ядра.

В интерфазном ядре, равно как и в ядрах, изолированных в сахарозе-глицерофосфате система нуклеонема — нити ДНП находится в неагрегированном состоянии. Гранулы и осевые нити нуклеомемы и молекулы ДНП имеют близкие диаметры (100—200 Å) и вследствие того, что они идут в разнообразных направлениях, создают картину гомогенного ядра.

Под действием 0,14М NaCl, как и в растворах изолированного ДНП, происходит конденсация и частичная агрегация нитей ДНП, и вследствие этого вся структура сокращается. Разрывы оболочки легко могут быть объяснены, так как нуклеомемы, являющиеся осевой нитью хроматина, прикреплены концами к оболочке. Направление нитей ДНП относительно оси конденсированных структур (после экстракции 0,14 М NaCl) не может быть однозначно

определено из анализа электронномикроскопических картин, но все же последние позволяют считать более вероятным прикреплению ДНП-нитей концами к нуклеонеме, чем соединение ДНП-нитей конец в конец. Первый тип организации ядерного материала позволяет лучше объяснить и восстановление первичной гомогенной структуры после помещения ядер в исходную среду.

Существование нуклеомемы, ее связь с оболочкой, присутствие нуклеомемы как в хроматине, так и в ядрышке следует из электронномикроскопических картин ядер с разрушенным или удаленным ДНП. Дополнительно необходимо отметить, что типичная нуклеонема обнаружена в ядрышках необработанных ядер, если только фиксация последних велась OsO_4 в сахарозно-глицерофосфатной среде. Нуклеомемы хроматина из-за того, что их диаметр близок к диаметру нитей ДНП, в исходных ядрах идентифицировать трудно.

Таким образом, предположение об идентичности строения и состава ядрышек и так называемых «остаточных хромосом» (5, 8, 11, 12) подтверждается. Ядрышко — это клубок нуклеонем, а «остаточные хромосомы» — это нуклеомемы хроматина, но смятые и давшие складки в процессе извлечения очень вязкого раствора ДНП из ядра, в результате чего их и можно наблюдать в световом микроскопе. Если удаляемый раствор ДНП не вязкий (после обработки ДНКазой), то нуклеомемы не деформируются и остаются в расправленном состоянии, уже не выявляясь в световом микроскопе.

Наконец, картины, полученные после обработки ДНКазой, дают указание на характер взаимоотношений нуклеонемы и ДНП. При фиксации в сахарозно-глицерофосфатной среде осколки ДНП находятся в растворенном

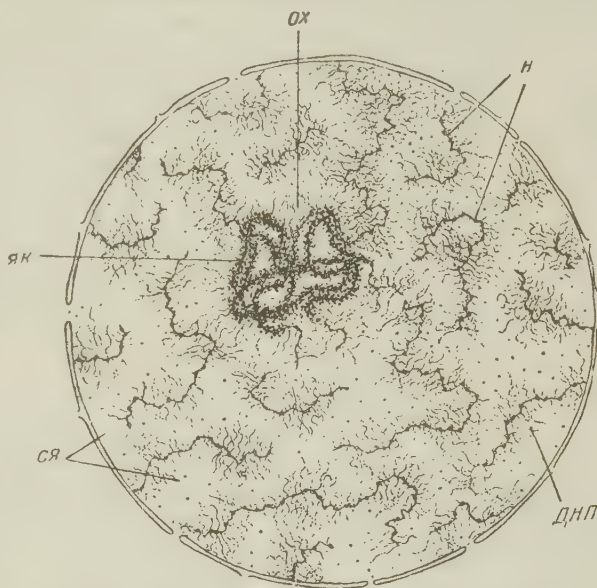


Рис. 2. Схема предполагаемой структуры интерфазного клеточного ядра. *н* — нуклеомемы ДНП — нити ДНП, *як* — ядрышко, *ох* — околяядрышковый хроматин, *ся* — ядерный сок

состоянии и поэтому не выявляются. При фиксации в OsO_4 — 0,14 М NaCl происходит осаждение ДНП на нуклеоме, причем правильный порядок его расположения по длине нуклеомы (два спирально идущих друг против друга уплотнения) позволяет думать, что эта конденсация идет по линии прикрепления нитей ДНП к нуклеоме на фрагментах ДНП, сохранивших еще свою связь с нуклеомой после действия ДНКазы. Данные Мозеса (⁴) о структуре мейотических хромосом также говорят в пользу прикрепления нитей ДНП к осевым нитям типа нуклеомы.

Таким образом, благодаря применению комплексного подхода к изучению ультраструктуры ядра, нам удалось обнаружить, помимо ДНП, нитевидные образования — нуклеомы в интерфазных ядрах — и показать их одинаковую структуру как в ядрышке, так и в хроматине. Конечно, предлагаемое объяснение субмикроскопического строения ядра является рабочей гипотезой, которая в процессе проверки и доработки может претерпеть изменения.

Ряд вопросов, в частности, например, о поведении нуклеомы при митозе, о числе нуклеом в хромосоме (одна или несколько?) и т. д. в настоящей работе не ставился и может быть разрешен лишь при изучении митоза сходными методами.

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова
Академии наук СССР

Поступило
13 XI 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Ris, Сборн. Symposium on the Chemical Basis of Heredity, Baltimore, 1957, p. 23. ² Г. Штих, Сборн. Проблемы цитофизиологии, ИЛ, 1957, стр. 42. ³ В. Бернар, А. Бауэр и др., там же, стр. 53. ⁴ M. J. Moses, J. Biophys. and Biochem. Cytol., **4**, 633 (1958). ⁵ И. Б. Збарский, Г. П. Георгиев, Биохимия, **24**, 192 (1959). ⁶ I. B. Zbarsky, G. P. Georgiev, Biochim. et Biophys. Acta, **32**, 301 (1959). ⁷ Г. П. Георгиев, Биохимия, **23**, 700 (1958). ⁸ Г. П. Георгиев, Цитология, **2**, 186 (1960). ⁹ Г. П. Георгиев, Л. П. Ермолаева, И. Б. Збарский, Биохимия, **25**, 312 (1960). ¹⁰ F. S. Sjostrand, J. Cell. Comp. Physiol., **42**, 15 (1953). ¹¹ A. E. Mirsky, H. Ris, J. Gen. Physiol., **31**, 7 (1947). ¹² A. E. Mirsky, H. Ris, J. Gen. Physiol., **34**, 475 (1951).

В. Л. БОРОВЯГИН

**ЭЛЕКТРОННОМИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
УЛЬТРАСТРУКТУРЫ МИЕЛИНОВОЙ ОБОЛОЧКИ
ПЕРИФЕРИЧЕСКОГО НЕРВА ЛЯГУШКИ
В РАЗЛИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ФИКСАЦИИ ОБЪЕКТА**

(Представлено академиком А. И. Опариным 8 X 1959)

Изучение вопросов, связанных с возникновением и проведением нервного импульса (¹), требует тщательного исследования ультраструктуры нервного проводника (², ³).

В настоящее время сочетанием биохимического и рентгеноструктурного анализов с методами электронной микроскопии доказано нативное существование периодичности в структуре миелиновой оболочки. Эта периодичность идентична чередованию осмиефильных районов на фиксированных осмием репаратах, дающих характерные картины на электронномикроскопических фотографиях. На рис. 1 приведено схематическое распределение Os в фосфолипидных и протеиновых комплексах миелина согласно данным Стокениуса (⁴).

Изучение функциональных изменений ультраструктур неразрывно связано с вопросами сохранения их прижизненной организации и требует выбора стандартных условий фиксации объекта.

Основной задачей настоящего сообщения является определение наилучших условий фиксации компонент ультраструктуры миелиновой оболочки периферического нерва осмиевой кислотой и формалином. Литературные данные о фиксации этого объекта в осмиевой кислоте не содержат строго выработанных методических приемов, а описание Фернандес-Мораном и Риннеаном (⁵) применения в качестве фиксатора формалина не дает возможности выяснить его действие на сохранение ультраструктуры миелина. Выяснение этого вопроса также представляет интерес, ибо общеизвестно, что формалин обладает относительно большой скоростью фиксации тканей.

В наших экспериментах были использованы пары чистого 5% раствора OsO_4 и 1% раствор OsO_4 (как апробированный в электронномикроскопических исследованиях фиксатор), 4% раствор нейтрального формалина (как быстро фиксирующий агент) в ацетат-вероналовом буферном растворе при pH 7,2 (^{6,7}). Фиксация седалищного нерва лягушки (*Rana temporaria*) проводилась *in vivo* (при $t = 4 \div 6^\circ$) нейтральным формалином в течение 7—15 мин. с последующей импрегнацией в 1% буферном растворе OsO_4 в течение 1 час.) и 1% раствором OsO_4 в течение 1—1,5; 3 и 4,5 час. Фиксация в парах 5% раствора OsO_4 проводилась при $t = +2^\circ$ в течение 2,5 час. (после фиксации непосредственно спиртовая проводка через 35; 70; 96 и 100° спирт). По окончании фиксации кусочки ткани промывались раствором Рингера (5 мин.) и проходили соответствующую обработку (⁷) с последующей заливкой в смесь бутил-метилметакрилатов (4 : 1). Полимеризация блоков проводилась при $t = 48 \div 50^\circ$ в течение 24 час. Поперечные и продольные срезы миелиновой оболочки аксонов ствола седалищного нерва лягушки получали на микротоме Шестранда с применением стеклянных ножей (⁸). Срезы толщиной $200 \div 250 \text{ \AA}$ помещали на специально приготовленные пред-

метные сетки* и исследовали на электронном микроскопе тип УЭМ-100⁽¹⁰⁾ при разгоняющем напряжении в 60 кВ (апертурная диафрагма объективной линзы 30 μ) и электронноскопических увеличениях от 10 000 до 17 000. Картины субмикроскопического строения миелиновой оболочки аксона, полученные с поперечных и продольных ультратонких срезов, идентичны.

Фотографии миелиновой оболочки, фиксированной 4% формалином, показывают грубое нарушение периодичности в структуре миелина с появлением разрывов в липопротеиновых макромолекулярных слоях (рис. 2, 6). Электронномикроскопические картины материала, фиксированного

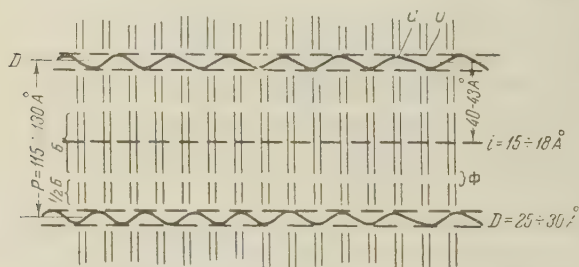


Рис. 1. *a* — протеиновый макромолекулярный слой, *b* — осмированные гидрофобные связи бимолекулярных цепей фосфолипидов (Б). *Ф* — линия гидрофильных связей смежных цепей фосфолипидов. *P* — период чередования линий *D*

(линии $D = 25 \div 30 \text{ \AA}$ с периодом $P = 120 \div 135 \text{ \AA}$), а также импрегнация осмием гидрофобных связей бимолекулярных цепей фосфолипидов (линии $i = 15 \div 18 \text{ \AA}$) (рис. 2, 2).

Материал, фиксированный осмием в течение 3 час., дает картины с менее четко выраженной ультраструктурой. Почти исчезают линии *i*, менее четко выражены и *D*-линии. Наблюдается появление сильно осмированных участков (гранул Γ) на линиях и в липидных цепях (рис. 2, 3).

Фиксация материала осмием в течение 4,5 час. дает картину структуры, где наряду с полным отсутствием линий *i*, появлением гранул Γ наблюдается частичное нарушение линий *D* и образование лагун Λ на месте двойных бимолекулярных цепей фосфолипидов (рис. 2, 4 и 5).

На основании приведенных данных можно заключить, что применение в качестве фиксатора формалина не дает положительных результатов, ибо его действие, очевидно, сопровождается нарушением молекулярных связей в биохимических комплексах структуры миелина.

Картины миелиновой структуры, полученные после фиксации исследуемого материала в парах 5% раствора OsO_4 и в 1% растворе OsO_4 в течение 1–1,5 час. дают характерную субмикроскопическую слоистость, параметры которой совпадают с данными, изложенными в работах Фернандес-Моран и Робертсона и др.^(4, 5, 9).

Увеличение времени фиксации осмиевой кислотой до 3 и 4,5 час. ухудшает сохранность структуры миелина. При длительном действии фиксирующего раствора осмия, вероятно, происходит нарушение связей макромолекулярных единиц, в результате чего появляются районы скопления осмия (гранулы Γ), исчезают осмеофильные линии в фосфолипидных бимолекулярных цепях и происходит частичное разрушение гидрофильных связей последних (расхождение линий *D* с образованием лагун).

* Обычные предметные сетки неоднократно прокатывались между стальными валиками под давлением с одновременным травлением в HNO_3 (70%) и последующей промывкой в спирте, ацетоне. Загрязнения удалялись травлением в концентрированной HCl и кипячением в NH_4OH в течение 2–3 мин. На чистые плоские сетки наносили формваровую пленку толщиной в 200 \AA (8) (перед нанесением пленки сетки обрабатывались раствором формвар разбавленного дихлорэтаном 1 : 2).

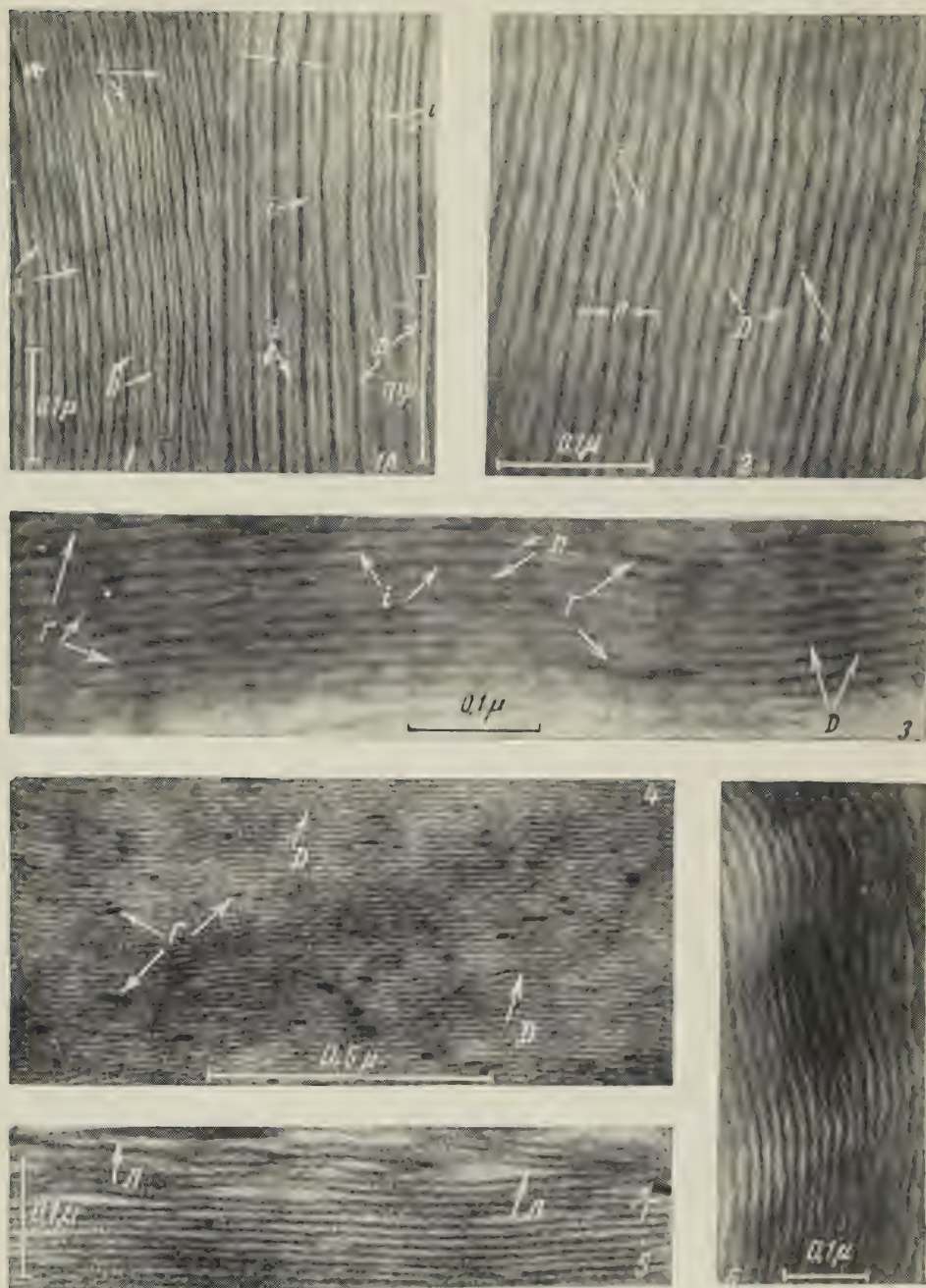


Рис. 2. Поперечные и продольные срезы миелиновой оболочки аксонов седалищного нерва лягушки (различные условия фиксации, см. текст)

Из изложенного можно заключить, что оптимальными условиями, рекомендуемыми для фиксации структур миелиновой оболочки нерва, являются пары 5% раствора OsO_4 и 1% раствор OsO_4 продолжительностью фиксации в течение $1 \div 1,5$ час. Соотношение же скорости диффундирования осмия в тканях (1 сек. $0,3 \mu$) и размеров миелиновой оболочки аксонопериферических нервов (от $0,07$ до 1μ) дает возможность, по нашему мнению, использовать эти условия фиксации при изучении вопросов, связанных с изменением ультраструктур миелина при дегенеративных процессах, а также выяснения его функциональной роли в нервном проводнике.

В заключение автор выражает благодарность проф. Г. М. Франку за методические указания при выполнении работы, а также за помощь, оказанную при подготовке рукописи к печати.

Институт биологической физики
Академии наук СССР

Поступило
8 X 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. биол., № 1 (1958). ² В. Л. Боровягин, Г. М. Франк, Цитология, 1, 1 (1959). ³ В. Л. Боровягин, Цитология, 2, 2 (1960). ⁴ W. Stoeckenius, J. Biophys. Biochem. Cytol., 5, 3 (1959). ⁵ H. Fernandez-Morgan, S. Finean, J. Biophys. Biochem. Cytol., 3, 5 (1957). ⁶ G. F. Palade, Proc. Intern. Conf. Elektr. Microsc., London, 1954. ⁷ F. S. Sjöstrand, H. Hanson, J. Exp. Cell. Res., 6, 2 (1954). ⁸ В. Л. Боровягин, В. Н. Ефимов, А. П. Дубров, Биофизика, 3, 6 (1958). ⁹ S. D. Robertson, Intern. Conf. Elektr. Microsc., Berlin, 1958. ¹⁰ В. Л. Боровягин, М. Г. Купцов, Биофизика, 5, 3 (1960).

А. В. БУРСИАН

ВЛИЯНИЕ ГАММА-ЛУЧЕЙ НА ЭМБРИОНАЛЬНЫЙ ЭРИТРОПОЭЗ

(Представлено академиком Н. Н. Аничковским 7 I 1960)

Известно, что характер отклонений от нормального эмбриогенеза различных органов и систем зависит от стадии развития, в которой находится эмбрион к моменту облучения. В этом плане известны исследования радиационных повреждений развития нервной системы (¹), скелета (²) и других систем. Развитию же системы крови под влиянием ионизирующих излучений посвящено сравнительно небольшое количество исследований. Между тем, с самого начала клинического и экспериментального применения рентгеновских лучей отмечались большие гематологические изменения у людей и взрослых животных (^{3,4}). В настоящее время эти изменения хорошо изучены (⁵⁻⁸).

Кроме общеизвестных изменений красной и белой крови при лучевой болезни в ряде случаев обращают на себя внимание глубокие качественные нарушения гемопоэза. Здесь следует отметить возникновение лейкомоидных реакций (по ряду данных развернутой картины лейкоза) и появление очагов мегалобластического эритропоэза. И та, и другая реакции характеризуются определенной степенью эмбрионизации гемопоэза.

В монографии Егорова и Бочкарева (⁵) указывается на сходство анемии Адиссона—Бирмера и гематологических симптомов при лучевой болезни. В частности, это сходство определяется возникновением мегалобластического кроветворения. В эксперименте мегалобластическая реакция костного мозга отмечена у собак в результате хронического рентгеновского облучения (⁹).

Мегалобластическая реакция встречается не только при пернициозной анемии и лучевой болезни, но и при ряде других патологических состояний. Особенно легко переход к эмбриональному, мегалобластическому эритропоэзу происходит у детей раннего возраста при анемиях, лейкозах, инфекционных заболеваниях (¹⁰). На основании этого мы вправе ожидать еще большей лабильности кроветворения в эмбриональном периоде. В этом отношении в радиобиологической литературе имеются лишь отдельные указания на увеличение количества мегалоцитов и мегалобластов в крови эмбрионов и новорожденных крысят, облученных внутриутробно в конце беременности (^{11, 12}).

Наши исследования проведены на эмбрионах кур породы белый леггорн. Облучение яиц γ -лучами Co^{60} производилось при обычных условиях инкубации на 5 или 8 сутки (доза 1000—1300 г, мощность 1,2—1,45 г/мин). Подсчитывалось количество клеток в 1 мм³ крови, относительные и абсолютные количества клеток мегало- и нормобластического ряда.

У куриных эмбрионов в норме наличие мегалобластического и нормобластического эритропоэза показано рядом авторов (¹³⁻¹⁶).

Установлено, что мегалобластический эритропоэз начинается в кровяных островках внезародышевой мезенхимы в 1 сутки инкубации. В последующие дни формируется первый орган эмбрионального кроветворения в виде сети кроветворных капилляров в стенке желточного мешка. На 5—6 сутки инкубации мегалобластический эритропоэз практически прекращается. В этот же период начинается нормобластический эритропоэз.

Следует отметить, что в исследуемый период эмбриогенеза кроветворение совершается не только в примитивном и весьма диффузно расположенном органе кроветворения, но и во всей циркулирующей крови. В периферической крови находятся все стадии дифференцировки эритроцитов, начиная с проэритробласта и клетки в процессе митотического и amitotического деления. В дальнейшем гемопоэз все более концентрируется в органах кроветворения. С 11—13 суток инкубации кроветворная функция переходит к окончательному кроветворному органу — костному мозгу.

Таким образом, 5 суток инкубации, избранные нами в качестве срока облучения в I серии опытов, представляют собой переходный этап от мегалобластического кроветворения к нормобластическому. Воздействию проникающих излучений в этот период подвергаются клетки мегалобластического эритропоэза в предшествующей зрелой и в зрелой стадиях, а клетки дефинитивного эритропоэза — в ранней, малодифференцированной. При облучении на 8 сутки инкубации примитивный эритропоэз полностью закончен, а элементы дефинитивного ряда представлены самыми различными стадиями созревания.

После облучения яиц на 5 суток инкубации общее количество форменных элементов в 1 мм^3 периферической крови значительно снижается и составляет на 9 сутки инкубации лишь 27% от контроля. Анемизация в этот период усиливается массивными кровоизлияниями в области головы зародыша.

При дифференцированном подсчете отмечено, что абсолютное число клеток как мегалобластического, так и нормобластического ряда (в 1 мм^3) уменьшено по сравнению с контролем, за исключением 11—12 дня инкубации, когда мегалоцитов несколько больше, чем в контроле. Для выяснения степени обнаруженных изменений число клеток мегало- и нормобластического ряда выражено в процентах по отношению к соответствующему контролю. Данные рис. 1 А свидетельствуют о том, что нормобластический эритропоэз (отражением которого является количество нормобластических элементов периферической крови) угнетен в значительно большей степени, чем мегалобластический. Число мегалобластических элементов непосредственно после облучения составляет 57% от контроля. Это различие может быть обусловлено и временным угнетением последних фаз мегалобластического эритропоэза и вероятно даже в большей степени, распадом части мегалоцитов и промгалоцитов. Последнее подтверждается и морфологически: кариолиз, кариопикноз и другие дегенеративные изменения в мегалоцитах. Однако в последующие дни количество мегалоцитов относительно контроля возрастает. На 8—10 сутки оно находится в пределах вариаций контроля, а на 11—12 сутки превышает контрольный уровень, в отдельных случаях в 1,5—2 раза.

Если принять, что у облученных зародышей мегалобластический эритропоэз заканчивается, как и в контроле, на 5—6 сутки, то, очевидно, физиологическая убыль количества мегалоцитов не должна быть по своей интенсивности меньше, чем в контроле, т. е. если в момент прекращения мегало-

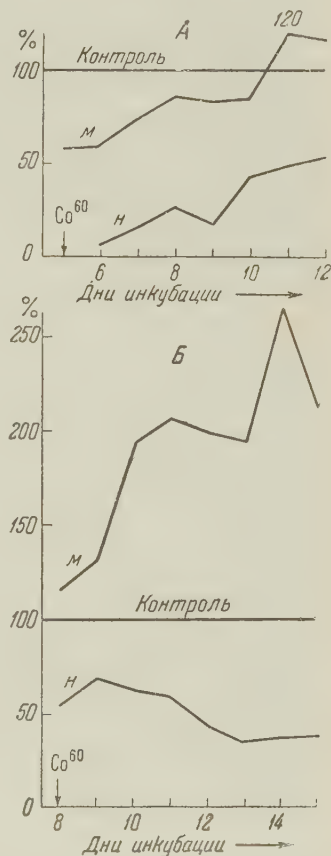


Рис. 1. Соотношение числа клеток мегалобластического (М) и нормобластического (Н) ряда. Объяснения в тексте

бластического эритропоэза количество клеток у облученных составляло 57—58%, то такое же соотношение сохранилось бы до конца исследуемого срока. Более того, эта разница должна была бы еще и увеличиться за счет убыли определенного количества клеток, вследствие массивных кровоизлияний и повышенного распада клеток.

Наблюдаемые отношения могут быть объяснены только тем, что мегалобластический эритропоэз продолжает функционировать значительно дольше, чем в контроле, и даже активируется по сравнению с уровнем 5—6 суток.

Приведенные количественные данные подтверждаются и морфологически. На препаратах крови 10—11-дневных эмбрионов в контроле все мегалоциты стойко оксифильны, зрелы. У облученных зародышей того же возраста наряду со зрелыми мегалоцитами встречаются клетки того же ряда, но с той или иной степенью базофилии цитоплазмы и строением ядра, свойственным более молодым клеткам. Наличие незрелых форм прямо указывает на функционирование примитивного эритропоэза.

При облучении яиц на 8 сутки инкубации наблюдается растущая анемия. Особенно выраженной она становится, начиная с 11 суток, т. е. в период начала костномозгового кроветворения в контроле.

Кровоизлияния у эмбрионов, облученных на 8 сутки инкубации, менее массивны, чем при облучении на 5 сутки, но они более диффузны. Это также в какой-то мере отражается на количественном составе периферической крови, однако наибольшую анемизацию мы обнаруживали у тех эмбрионов, у которых развивались обширные отеки покровных тканей.

На мазках крови облученных эмбрионов мегалоцитов значительно больше, чем в соответствующем контроле. Например, на 12 сутки инкубации в контроле примитивных эритроцитов 3,2%, а у одного из облученных эмбрионов 38,6%. Абсолютное количество клеток нормобластического ряда значительно отстает от контрольного, в то время как абсолютное количество мегалоцитов в течение всего исследуемого срока выше контрольного.

На рис. 1Б представлены количественные отношения клеток той и другой линии эритропоэза к соответствующему контролю. У подавляющего большинства эмбрионов число мегалоцитов значительно превышает контрольный уровень. Это различие постепенно увеличивается. Если на 8 сутки количество мегалоцитов находится в пределах максимальных колебаний контроля, то на 14—15 сутки оно превосходит контрольное в 2,5—2 раза. В двух случаях число мегалоцитов в 4 и более чем в 7 раз превосходит контрольное.

На основании изложенных выше данных может сложиться впечатление, что мегалобластическая реакция у эмбрионов, облученных на 5 сутки инкубации, менее выражена, чем при облучении на 8 сутки. Однако количество клеток мегалобластического эритропоэза в периферической крови определяется интенсивностью процессов созидания и разрушения этих клеток. Мегалоциты в крови эмбрионов, облученных на 5 сутки, характеризуются большими структурными изменениями (фрагментации ядер, неравномерные амитозы, патологические митозы). Ряд изменений — таких, как кариолиз, пикноз, — непосредственно указывают на гибель клетки. Вероятно, это и обуславливает уменьшение числа мегалоцитов непосредственно после облучения, так как именно в этот период перечисленные изменения наиболее выражены.

В дальнейшем процессы разрушения ослабевают, а мегалобластический эритропоэз продолжается. В результате содержание мегалоцитов в периферической крови возрастает до контрольного уровня, а затем и несколько превосходит его.

В клетках нормобластического ряда описанные структурные изменения почти не встречаются.

Во II серии опытов к моменту облучения мегалобластический эритропоэз не осуществляется. Он возникает позже, и мегалоциты в крови, в основном, не содержат тех изменений, которые были характерны для

опытов I серии. Поэтому абсолютное их число оказывается выше, чем в контроле.

Что же касается нормобластического эритропоэза, то клетки этого ряда содержат в большом количестве все те изменения, которые были характерны для мегалоцитов предыдущей серии. Представляется вероятным, что распад этих клеток является дополнительным стимулом мегалобластической реакции.

Таким образом, если при облучении на 5 сутки инкубации мы имели дело с продолжением мегалобластического эритропоэза на более длительный срок по сравнению с контролем, то в случае облучения на 8 сутки в условиях прекратившегося мегалобластического эритропоэза происходит возврат к онтогенетически более ранней форме кроветворения.

В работах Л. А. Орбели и его сотрудников широко освещен факт выявления онтогенетически более ранних функций под влиянием повреждения или угнетения высших регуляторных механизмов. Приведенные данные иллюстрируют этот факт на примере реактивации и возврата к мегалобластическому эритропоэзу при радиационном поражении более совершенного нормобластического эритропоэза.

Институт эволюционной физиологии им. И. М. Сеченова
Академии наук СССР

Поступило
5 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. P. Hicks, *Physiol. Rev.*, **38**, № 3, 337 (1958). ² L. B. Russell, W. L. Russell, *J. Cell. and Comp. Physiol.*, **43**, Suppl. 1, 103 (1954). ³ А. В. Репрев, Экспериментальная и клиническая рентгенология. Приложение к журн. Врачебное дело, 1926. ⁴ А. Вокс, *Strahlentherapie*, **16**, Н. 5, 775 (1924). ⁵ А. П. Егоров, В. В. Бочкарев, Кроветворение и ионизирующая радиация, М., 1955. ⁶ Н. А. Куршаков, Сов. медицина, **20**, № 9, 30 (1956). ⁷ L. O. Jacobson, E. H. Marcus et al., *National Nuclear Energy Series, Div. 4*, **22**, B, N. Y., 1954, p. 265. ⁸ М. А. Влоот, *National Nuclear Energy Series, Div. 4*, **22**—1, N. Y., 1948, p. 162. ⁹ М. С. Лаптева-Попова, Мед. радиол., **3**, № 2, 53 (1958). ¹⁰ А. Ф. Тур, Гематология детского возраста, Л., 1957. ¹¹ А. Ю. Свигрис, Акушерство и гинекология, № 5, 11 (1958). ¹² С. Л. Петросян, З. Ф. Лопатникова, Вестн. рентгенол. и радиол., **34**, № 2, 38 (1959). ¹³ C. S. Engel, *Arch. micr. Anat.*, **44**, 237 (1895). ¹⁴ W. Danchakoff, *Anatomische Hefte*, **37**, Н. 113, 471 (1908). ¹⁵ A. B. Dawson, *Zs. Zellforsch.*, **24**, 256 (1936). ¹⁶ Z. Richter, *Cecoslovensca Morphol.*, **3**, № 2, 176 (1955).

Н. П. ДМИТРИЕВА

ЭЛЕКТРОМИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КЛЕТОК ОПУХОЛИ БРОУНА — ПИРС В РАННИХ СРОКАХ ПОСЛЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ УЛЬТРАЗВУКОМ БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 4 I 1960)

В предыдущих наших работах и работах сотрудников нашей лаборатории было показано, что кратковременное действие ультразвука большой интенсивности на опухоль Броуна — Пирс у кроликов приводит к постепенному рассасыванию последней и к распаду и рассасыванию неозвученных метастазов (¹⁻³). Гистологическое исследование в световом микроскопе опухоли Броуна — Пирс сразу же после озвучивания и спустя несколько дней не обнаружило видимых изменений в опухолевых клетках (⁴). В ряде случаев наблюдалось лишь некоторое укрупнение митохондрий в плазме клеток озвученной опухоли. Гистохимические методы позволили установить резкое уменьшение количества РНК в цитоплазме этих клеток (⁵). Лишь спустя определенный латентный период, равный 14—21 дням, в клетках озвученных опухолей отмечались постепенно усиливающиеся дистрофические процессы, приводящие в конечном счете к полному распаду и к последующему рассасыванию опухоли (⁴). Однако эти процессы, по-видимому, явились отражением вторичного действия ультразвука на опухолевую ткань.

Для понимания первичного механизма действия ультразвуковых колебаний на опухолевую ткань представляет интерес изучить в электронном микроскопе субмикроскопические изменения в клетках опухоли в ранних сроках после озвучивания. С этой целью и проведено данное исследование.

Объектом нашего исследования явилась опухоль Броуна — Пирс, рассасывание которой после ультразвукового воздействия было ранее установлено (^{1, 2}). Электрономикроскопическое исследование этой опухоли без каких-либо воздействий на нее было нами предварительно проведено и описано (⁶).

Кроликам-самцам породы шиншилла весом 2,4—2,8 кг для удобства озвучивания перемещали правое яичко под кожу внутренней поверхности бедра и одновременно прививали в него опухоль Броуна — Пирс в количестве 0,8 мл (разведение в физиологическом растворе 1 : 3). На 10 день после прививки озвучивали развившуюся опухоль в яичке. Озвучивание проводили при помощи мощной ультраакустической установки, сконструированной А. К. Буровым (⁷). Применялись следующие режимы озвучивания: статика, частота 1000—1500 кгц, мощность 100—150 вт/см², экспозиция 1,3 сек.; озвучивали в водяной ванне при температуре воды 27°. Кроликов наркотизировали внутривенным введением 0,8 мл гексенала. Через 45 мин. и через 24 часа после озвучивания кроликов умерщвляли воздушной эмболией. Озвученную опухоль тотчас же извлекали и фиксировали по 3 уровням, перпендикулярным ходу ультразвукового луча (начиная с поверхности). Последнее было предпринято в целях изучения изменений, происходящих по всей толще опухоли. Одновременно забивали контрольных кроликов, и опухоль также фиксировали по 3 соответственным уровням. Кусочки опухоли размером в 1 мм³ фиксировали по Паладу (⁸) в 2% растворе буффе-

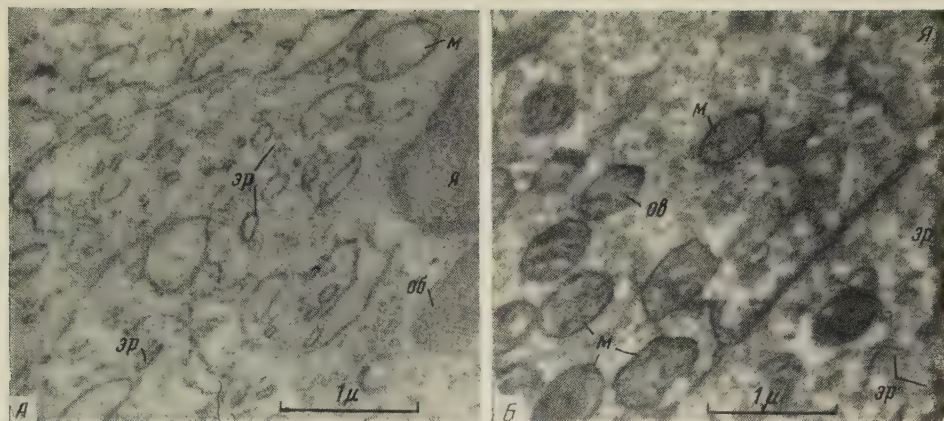


Рис. 1. А — часть клетки незвученной опухолевой ткани (контроль): справа — ядро (я) с двойной оболочкой (об); в плазме митохондрии (м) и эргастоплазматический ретикулум (эр.). Б — клетка 1-го уровня опухоли Броуна—Пирс через 45 мин. после озвучивания; субмикроскопические изменения не обнаружены: м — митохондрии с хорошо выраженной внутренней структурой и основным веществом (о.в.); эр — эргастоплазма, я — ядро

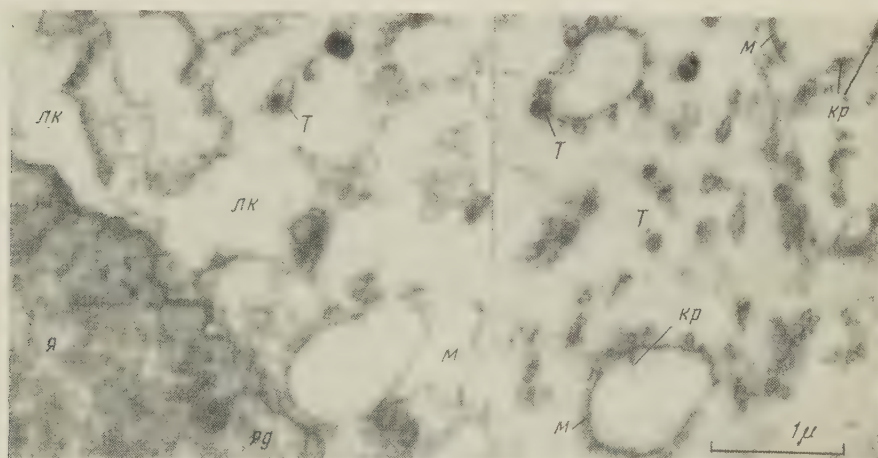


Рис. 2. 2-й уровень той же опухоли, что и на рис. 1 Б. Видны резко набухшие митохондрии (м) с разрушенной внутренней структурой, местами с лопнувшей оболочкой, слившиеся в лакуны (лк); кр — остатки крист у оболочке, я — ядро с ядрышками (яд); в плазме и на оболочке митохондрий многочисленные тельца (т)

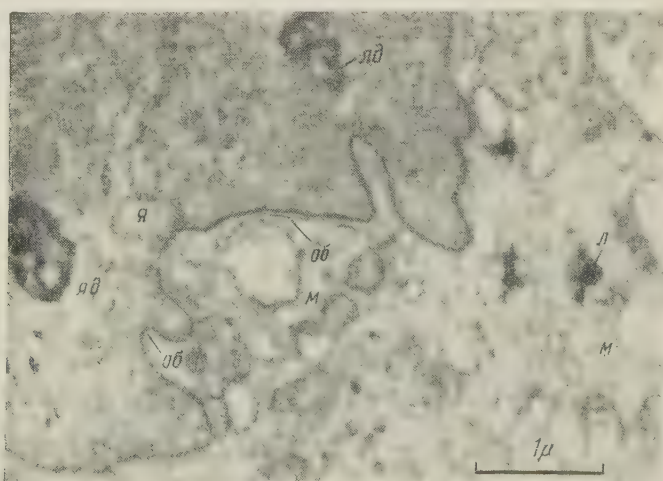


Рис. 3. Клетки 1-го уровня опухоли Броуна—Пирс через 24 часа после озвучивания. м — митохондрии, л — липоидные гранулы, я — ядро, об — двойная расслоившаяся оболочка, яд — ядрышки

рованной осмиевой кислоты (рН 7,3) в течение 2—3 час. После промывки в растворе Тироде обезжизняли в спиртах и заливали в смесь бутила и метилметакрилата, разлитую по желатиновым капсулам. Полимеризация проводилась в термостате при температуре 50°. Затвердевшие блоки затачивали пирамидой и резали на микротоме системы Юнга с применением стеклянных ножей. Срезы толщиной в 200—300 Å изучали в электронном микроскопе УЭМ-100 при напряжении в 60 кв. Материал заливки из срезов не удалялся. Фотографирование характерных участков исследуемой опухолевой ткани проводили при увеличении в 8000 раз. Представленные отпечатки увеличены до 18 000 раз.

При изучении в электронном микроскопе ультратонких срезов опухоли Броуна — Пирс через 45 мин. после озвучивания в первую очередь обращает на себя внимание, в отличие от контроля, неоднородность субмикроскопических картин 3 уровней.

В 1-м и 3-м уровнях озвученной опухоли обнаруживаются клетки, сходные по своему строению с клетками контрольных опухолей (⁶). На представленных электронограммах (рис. 1 Б) мы видим, что в плазме клеток 1-го уровня озвученной опухоли, как и в плазме клеток контрольной опухоли (рис. 1 А), обнаруживается хорошо развитый эргастоплазматический ретикулум (*э.р.*) в виде двойных мембран той или иной длины. При поперечном разрезе эргастоплазматический ретикулум выглядит в виде различных по форме и размерам пузырьков. На стенках мембран четко различаются гранулы РНК (гранулы Палада). Последние в большом количестве обнаруживаются также свободно лежащими в цитоплазме.

В цитоплазме часто наблюдается скопление значительного числа митохондрий (*м*) с хорошо развитой внутренней структурой в виде двойных мембран (рис. 1 Б). Форма митохондрий чаще овальная. Размер их варьирует от 0,3 до 0,8 μ в длину и от 0,22 до 0,44 μ в ширину. Во многих митохондриях обнаруживается основное вещество (*о.в.*) в виде мелких гранул, расположенных между кристами.

Ядра в клетках как озвученных, так и неозвученных опухолей, окружены двойной оболочкой (рис. 1, *об*). Ядерное вещество представлено мелкими гранулами, более или менее равномерно расположенными по всему ядру.

Подобное же субмикроскопическое строение обнаружено во 2-м и 3-м уровнях контрольных опухолей и в 3-м уровне озвученной опухоли.

2-й уровень озвученной опухоли резко отличается по своему строению от предыдущих. Цитоплазма опухолевых клеток данного уровня приобретает спонгиозный вид за счет сильно набухших и ставших как бы пустыми митохондрий (рис. 2, *м*). Последние достигают в своих размерах до 1,22 μ в длину и до 1,0 μ в ширину, т. е. становятся почти в 2 раза больше крупных митохондрий в клетках контрольных опухолей. Внутренняя структура митохондрий исчезает, и лишь кое-где у оболочки органоида обнаруживаются остатки крист (рис. 2, *кр*). У некоторых митохондрий оболочка разрывается. Такие митохондрии, сливаясь друг с другом, образуют крупные лакуны (рис. 2, *лк*).

Эргастоплазматическая сеть разрушается.

По всей цитоплазме озвученных опухолевых клеток обнаруживаются плотные осмиофильные тельца, окруженные одиночной оболочкой. Местами центрального тельца не видно, а видна лишь окружающая оболочка в виде пузырька. Подобные же образования расположены на оболочках митохондрий (рис. 2, *т*). Природа их нам неясна. По своему морфологическому строению они сходны с вирусоподобными тельцами, описанными в опухолях многими авторами (⁹⁻¹¹). Однако обнаружение их в большом количестве вокруг дегенерирующих митохондрий наводит на мысль, что они являются продуктом выделения этих митохондрий, в частности липидоподобными каплями.

Ядро и ядрышки остаются в эти сроки исследования без субмикроскопических изменений (рис. 2).

Через 24 часа после озвучивания разрушение митохондрий и эргастоплазматического ретикулума распространяется и на 1-й уровень опухоли (рис. 3). В цитоплазме клеток этого уровня встречаются митохондрии, размер которых еще приближается к норме, однако внутренняя структура исчезает и они выглядят как бы пустыми (рис. 3, м). Увеличивается количество липоидных гранул в плазме клеток (рис. 3, л). Ядро опухолевых клеток становится многолопастным. По-видимому, такая структура ядра лучше обеспечивает обменные процессы в клетке с ухудшившимися условиями. Некоторые изменения отмечаются и со стороны оболочки ядра. Внешний слой отслаивается, и поэтому двухконтурность становится отчетливой. Внутренний слой становится более плотным и осмиофильным (см. рис. 3). Ядрышки и ядерное вещество остаются по-прежнему без изменений.

Отдельные набухшие митохондрии, близко располагаясь около ядра, как бы вдавливают оболочку внутрь (см. рис. 2 и 3).

Таким образом, в опухолевой ткани уже через 45 мин. после озвучивания удается отметить резкие субмикроскопические изменения в клетках, морфологические изменения в которых при исследовании в световом микроскопе не обнаруживаются. Изменения эти выражаются в набухании митохондрий, в разрушении их внутренней структуры, в нарушении строения эргастоплазматического ретикулума.

Вначале эти изменения в озвученной опухолевой ткани возникают участками, соответствующими, по-видимому, сгущению или разрежению, вызываемому в ткани ультразвуком.

Через сутки эти изменения распространяются на соседние слои опухоли и являются, по-видимому, вторичными.

Ранний срок исследования (45 мин. после озвучивания) позволяет считать, что наблюдаемые субмикроскопические изменения в озвученной опухолевой ткани являются результатом непосредственного действия мощного ультразвука на клетку.

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова
Академии наук СССР

Поступило
29 XII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. К. Буров, Г. Д. Андреевская, ДАН, 106, № 3, 445 (1956),
² Н. П. Дмитриева, Бюлл. эксп. биол. и мед., 46, № 11, 97 (1958). ³ Н. П. Дмитриева, Бюлл. эксп. биол. и мед., 44, № 11, 86 (1957). ⁴ Н. П. Дмитриева, Вопр. онкол., 3, № 6, 688 (1957). ⁵ И. И. Черемушенцева, ДАН, 114, № 1, 84 (1957). ⁶ Н. П. Дмитриева, ДАН, 121, № 5, 909 (1958). ⁷ А. К. Буров, ДАН, 106, № 2, 239 (1956). ⁸ G. E. Palade, J. Exp. Med., 95, № 3, 285 (1952). ⁹ W. R. Adams, A. M. Prince, J. Biophys. Biochem. Cytol., 3, № 2, 161 (1957). ¹⁰ W. Bernhard, Cancer Res., 18, № 5, 491 (1958). ¹¹ T. Suzuki, Japan J. Cancer Res., 48, № 1, 39 (1957).

А. А. КУЗНЕЦОВ и Б. Н. СТЕПАНЕНКО

ИЗУЧЕНИЕ ПРЕВРАЩЕНИЙ ДИФОСФАТА ФРУКТОЗЫ, ВВОДИМОГО В ОРГАНИЗМ ЖИВОТНЫХ

(Представлено академиком А. И. Опариным 7 I 1960)

При решении одной из важнейших биохимических задач — задачи управления обменом веществ и активного воздействия на функции организма — наряду с применением таких биостимуляторов, как коэнзимы и гормоны, определенную роль должно сыграть применение метаболитов (и антиметаболитов). Такой метаболит, как фруктозо-1,6-дифосфат уже находит практическое применение в клинике в качестве противошокового средства^(1, 2). Судьба вводимого в организм фруктозо-1,6-дифосфата (Ф-1,6-ДИФ) до настоящего времени, мало известна, хотя она представляет большой интерес. В немногих опубликованных на эту тему работах, где в крови помимо Ф-1,6-ДИФ определялось содержание других метаболитов^(3, 4), внимание обращалось на конечный продукт гликолиза — молочную кислоту. При этом, очевидно, исходили из предположения, что гликолиз является главным путем утилизации Ф-1,6-ДИФ. Полученные таким образом данные свидетельствуют, наоборот, о понижении содержания молочной кислоты после введения Ф-1,6-ДИФ и говорят скорее о противоположном — о том, что гликолиз Ф-1,6-ДИФ до конечных продуктов, во всяком случае, не является главным путем использования Ф-1,6-ДИФ. Таким образом, какой путь является главным при использовании Ф-1,6-ДИФ, — остается неясным.

Для решения этого вопроса в настоящей работе мы исследовали содержание в крови не только конечных продуктов гликолиза, но, в отличие от цитированных выше авторов, и некоторых промежуточных — фосфотриоз. Далее нам казалось необходимым выяснить возможность гидролитического пути, для чего изучалось содержание в крови фруктозо-6-фосфата (Ф-6-Ф) и фруктозы, а также ставились специальные опыты по изучению превращений возможного промежуточного продукта гидролиза Ф-1,6-ДИФ — Ф-6-Ф. Исследовалась моча животных. Опыты *in vivo* дополнялись в нужных случаях опытами с кровью *in vitro*.

П р е п а р а т ы. Для работы применялись стерильные стабильные 10% растворы натриевой соли Ф-1,6-ДИФ (препарат натрий-ДФФ), приготовленные по^(5, 6). Бариевая соль Ф-6-Ф готовилась путем осторожного гидролиза Ф-1,6-ДИФ по методу Нейберга с сотр.⁽⁷⁾ и переводилась в натриевую при помощи сульфата натрия. Раствор натриевой соли Ф-6-Ф приводился к pH 7,3—7,5 (2N HCl) и стерилизовался пропусканием через бакфильтры.

П о с т а н о в к а о п ы т о в н а ж и в о т н ы х. Опыты производились на кроликах. 10% стерильные растворы натриевой соли Ф-1,6-ДИФ вводились внутривенно в ушную вену в количествах по 0,5 г/кг. Непосредственно перед введением и через различные (указанные в таблицах) интервалы времени из ушной вены отбирались пробы по 1 мл крови в 3 мл 8% раствора трихлоруксусной кислоты. Из безбелковых ТХУ-центрифугатов отбирались пробы для химических анализов и хроматографических опытов.

Ф р а к ц и о н и р о в а н и е и о п р е д е л е н и е Ф-1,6-ДИФ и Ф-6-Ф в крови после введения производились по Роэ^(8, 9). Количества Ф-1,6-ДИФ и Ф-6-Ф в табл. 1 были вычислены путем умножения

Изменение содержания Ф-1,6-ДИФ и Ф-6-Ф в крови после введения Ф-1,6-ДИФ
(в миллиграмм-процентах)

Время взятия проб	Ф-1,6-ДИФ				Ф-6-Ф			
	номера опытов							
	1	2	3	4	1	2	3	4
Перед введением	3,3	1,90	2,37	3,32	0,0	0,0	1,01	2,37
Через 3 мин.	246,48	163,06	165,66	127,27	54,08	27,72	21,97	32,79
„ 15 „	46,93	—	36,97	46,22	15,21	13,18	12,51	18,93
„ 30 „	15,64	17,54	19,43	23,70	8,11	9,46	8,11	13,86
„ 45 „	8,13	7,11	8,13	9,48	2,37	3,72	4,39	8,11
„ 60 „	5,21	—	5,21	6,16	1,35	—	3,04	4,39

величин, найденных во фракциях по методу ⁽⁹⁾, на коэффициенты 2,37 и 1,69 для перевода фактически определяемой фруктозы в эквивалентные количества натриевых солей ди- и монофосфата фруктозы.

Как видно из табл. 1, содержание как ди-, так и монофосфата фруктозы быстро падает и уже через час после введения в кровь Ф-1,6-ДИФ приходит к норме, что свидетельствует об очень быстрой утилизации (или выделении?) эфиров фруктозы. Далее обращает на себя внимание чрезвычайно быстрое превращение дифосфата в монофосфат, содержание которого уже через 3 мин. составляет (при пересчете на эквиваленты фруктозы) ~30% от содержания дифосфата (в тот же момент).

Опыты хроматографического разделения Ф-1,6-ДИФ, Ф-6-Ф и фруктозы крови производились следующим образом: главная часть ТХУ из безбелковых ТХУ-центрифугатов экстрагировалась эфиром, освобожденные от ТХУ растворы нейтрализовались до рН 7,4—7,6 и хроматографировались на ленинградской бумаге с проявлением дифениламином по ранее разработанному методу ⁽¹⁰⁾.

Через 3 мин. после введения Ф-1,6-ДИФ в крови, наряду с этим эфиром, обнаруживалось пятно Ф-6-Ф, но свободная фруктоза не обнаружена. Отсутствие фруктозы

в крови приводит к предположению, что гидролиз Ф-1,6-ДИФ, приводящий к Ф-6-Ф, дальше не идет (или идет в ничтожном масштабе).

Изменение содержания фосфотриоз в крови после введения Ф-1,6-ДИФ. Уже приведенные выше данные, в частности гидролиз более $\frac{1}{4}$ Ф-1,6-ДИФ в первые 3 мин., свидетельствуют о том, что по крайней мере для главной массы Ф-1,6-ДИФ первым этапом его превращений является гидролиз до Ф-6-Ф. Однако исключить гликолитическое расщепление представлялось невозможным, и поэтому мы считали нужным определять содержание фосфотриоз (определялись по ⁽¹¹⁾).

Как видно из табл. 2, введение Ф-1,6-ДИФ, как правило, вызывает сразу же после введения повышение содержания фосфотриоз. В течение часа содержание фосфотриоз приходит к исходному, что совпадает с исчезновением из кровяного русла Ф-1,6-ДИФ. Небольшое повышение содержания фосфотриоз в крови говорит в пользу того, что гликолиз, по-видимому, не является главным путем превращения вводимого Ф-1,6-ДИФ. Однако при высокой реакционной способности фосфотриоз представлялось полезным провести определение содержания в крови гораздо более стойкого конечного продукта гликолиза — молочной кислоты.

Изменение содержания молочной кислоты в крови после введения Ф-1,6-ДИФ. Молочная кислота определялась по Баркеру и Самерсону (12). Результаты наших опытов (табл. 3) име-

Таблица 3
Изменение содержания молочной кислоты в крови после введения Ф-1,6-ДИФ (в процентах к исходному)

Время взятия проб	Номера опытов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Перед введением	100	100	100	100	100	100	100	100
Через 10 мин.	180	—	208	79	145	227	95	39
„ 30 „	192	132	134	34	79	173	75	17
„ 60 „	92	46	128	50	66	227	44	17
„ 120 „	40	39	136	31	55	145	14	28

ют довольно «пестрый» характер. В большинстве опытов (5 из 8) вскоре после введения (через 10 мин.) наблюдалось весьма небольшое повышение содержания молочной кислоты; затем следовало понижение, и в 3 случаях из этих 5 опытов содержание молочной кислоты по прошествии 2 час. падало даже ниже исходного. В меньшем числе опытов (3 из 8) после введения наблюдалось постепенное понижение содержания молочной кислоты. Несмотря на указанную «пестроту» результатов представляется возможным сделать два заключения: 1) повышение содержания молочной кислоты, наблюдавшееся не во всех случаях, очень невелико и непродолжительно; 2) небольшое повышение содержания фосфотриоз и молочной кислоты свидетельствует о том, что роль гликолитического пути при использовании Ф-1,6-ДИФ невелика.

Опыты по изучению превращений эфиров фруктозы в крови in vitro. Для опытов 3 объема цитратной крови, имеющей температуру 37°, смешивались с 1 объемом растворов Ф-1,6-ДИФ и Ф-6-Ф концентрации 5; 2,5 и 1, 25% (нагретых до 37°). Смесь инкубировалась в течение 1 часа при 37°. В начале опыта, через 30 и 60 мин. инкубации, отбирались пробы для анализа на неорганический фосфат и фруктозу.

Таблица 4
Фосфатазная и фосфогексоизомеразная активность крови при ее инкубации с Ф-1,6-ДИФ и Ф-6-Ф (в γ/мл)

Время взятия проб	Ф-1,6-ДИФ				Ф-6-Ф			
	Опыт № 1		Опыт № 2		Опыт № 3		Опыт № 4	
	Р _{неорг}	фруктоза	Р _{неорг}	фруктоза	Р _{неорг}	фруктоза	Р _{неорг}	фруктоза
До опыта	283	1710	66	2010	23	1860	72	1606
Через 30 мин.	283	1710	63	1950	21	1560	74	1238
„ 60 „	293	1680	66	2010	21	1230	75	780

Как видно из табл.4, в опытах с инкубацией Ф-1,6-ДИФ в течение часа не происходит сколько-нибудь существенных изменений содержания как неорганического фосфора, так и фруктозы. В опытах с Ф-6-Ф при практически постоянном содержании неорганического фосфора наблюдается резкое уменьшение содержания фруктозы. Постоянное содержание неорганического фосфора в обеих группах опытов свидетельствует о том, что гидролиз как Ф-1,6-ДИФ, так и Ф-6-Ф, по крайней мере в течение часа, в крови не происходит. Таким образом, весьма быстро идущий in vivo гидролиз Ф-1,6-ДИФ происходит не в крови, а в других тканях и органах.

Тот факт, что при сохранении прежнего содержания неорганического фосфора в опытах с Ф-6-Ф происходит резкое уменьшение фруктозы, свидетельствует об изомеризации этого эфира в глюкозо-6-фосфат (Г-6-Ф). Легкость такого превращения, особенно под влиянием фосфогексоизомеразы,

вообще хорошо известна. Чтобы приближенно оценить скорость изомеризации в наших опытах *in vitro*, нужно учесть, что состояние равновесия $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi \rightleftharpoons \Gamma\text{-}6\text{-}\Phi$, достигается тогда, когда изомеризуется 70% $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi$. Вычисления показывают, что в наших опытах *in vitro* уже через час $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi$ превращается в $\Gamma\text{-}6\text{-}\Phi$ приблизительно на 50—75% от возможного.

Таким образом, главным путем превращений $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ является его гидролиз до $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi$ и его изомеризация в $\Gamma\text{-}6\text{-}\Phi$.

Выделение с мочой эфиров фруктозы после введения $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ (табл. 5). Параллельные хроматографические

Таблица

Выделение с мочой фосфатов фруктозы после введения $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$

№ опыта	Введено $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$, мг	Время взятия мочи	Содержание эфиров фруктозы γ , фруктозы на 1 мл *	Количество мочи, мл	Всего выделено эфиров фруктозы, мг/фруктозы	Выведено $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$	
						мг	% от введ.
1	800	Через 1 час 3 ч. 30 мин.	3363* 83	11 7	37,0 0,6	87,7 1,4	11 0,2
2	1100	Через 30 мин. 3 ч. 30 мин.	3393 1143	23** 12	78,0 24,0	{ 241,8 327,6	22,0 23,4
3	1400	Через 1 час	3637	38	138,0		

* Вычислено с учетом данных контрольных опытов с мочой, собранной до введения $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$. ** Произошло неполное опорожнение пузыря.

опыты с мочой показали, что после введения $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ он появляется в моче; $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi$ и свободная фруктоза при этом отсутствуют. Отсюда можно было предположить, что вся или почти вся фруктоза принадлежит $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$.

Исходя из этого, мы рассчитали, какое количество вводимого $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ выводится с мочой. Эти цифры даны в двух последних столбцах табл. 5.

Как видно из табл. 5, в наших опытах с введением больших количеств $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$, создающих в крови совершенно ненормальные концентрации этого метаболита, по крайней мере в 80 раз превышающие обычные (см. табл. 1), в первые 30—60 мин. в собранной моче оказывается всего $\frac{1}{10}$ — $\frac{1}{4}$ введенного количества. В дальнейшем выделение $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ с мочой, по-видимому, прекращается вследствие исчезновения этого эфира из кровяного русла, что отчасти видно из табл. 5. Таким образом, в наших опытах усваивалось приблизительно $\frac{3}{4}$ — $\frac{9}{10}$ введенного количества $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$.

Из всех проведенных опытов следует, что подавляющая часть ($\frac{3}{4}$ — $\frac{9}{10}$) вводимого $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ используется организмом. Главным путем при этом является гидролиз $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ до $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi$, протекающий не в крови, а в других тканях и органах и превращение его в $\Gamma\text{-}6\text{-}\Phi$. Использование $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ по гликолитическому пути происходит лишь в небольшом масштабе. Гидролиз $\Phi\text{-}6\text{-}\Phi$ при введении $\Phi\text{-}1,6\text{-}\text{ДИФ}$ до фруктозы обнаружить не удалось.

Институт биохимии им. А. Н. Баха
Академии наук СССР

Поступило
3 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Н. Степаненко, Л. Н. Боброва, Изв. АН СССР, сер. биол., № 5, 597 (1958). ² Б. Н. Степаненко, Л. Н. Боброва и др., Авт. свид. № 116768. ³ R. Pellegrini, F. Pedrazzi, Arch. studio fisiopatol. e clin. ricambio, 20, 263 (1956). ⁴ P. Polosa, G. Sardo, C. Disalvo, Arch. studio fisiopatol. e clin. ricambio, 20, 249 (1956). ⁵ Б. Н. Степаненко, Л. Н. Боброва, Биохимия, 22, 1019 (1957). ⁶ Б. Н. Степаненко, Л. Н. Боброва, Авт. свид. № 108303. ⁷ C. Neuberger, H. Lustig, M. Rothenberg, Arch. biochem., 3, 33 (1944). ⁸ J. H. Roe, J. H. Epstein, N. P. Goldstein, J. Biol. Chem., 178, 839 (1949). ⁹ J. H. Roe, N. M. Paradoroulos, J. Biol. Chem., 210, 703 (1954). ¹⁰ Б. Н. Степаненко, А. А. Кузнецов, Биохимия, 24, 25 (1959). ¹¹ Н. П. Мешкова, С. Е. Сумерин, Практикум по биохимии животных, 1950. ¹² S. B. Barker, W. H. Sumner, J. Biol. Chem., 138, 535 (1941).

М. М. ИЛЬИН и Н. А. ТРУХАЛЕВА

О РАСАХ *TRIFOLIUM LUPINASTER* [L. s. l.]

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 15 I 1960)

В 1915, 1917 и 1933 гг. М. М. Ильин, работая на Южном и Среднем Урале в составе геоботанических экспедиций с участием И. М. Крашенинникова⁽¹²⁾ и И. В. Новопокровского⁽¹⁹⁾, обратил внимание на закономерное распределение форм красноцветного и кремоцветного лупиновидных клеверов, по Ледебурю отмечаемых как *Trifolium lupinaster* L. var α *purpurascens* Ldb. и *T. lupinaster* L. var. β *albiflorum* Ldb.^(13,14)

Эти наблюдения привели М. М. Ильина к выводу, что это не варьеты и формы, распределенные спорадически и незакономерно среди основного ареала *T. lupinaster* L. s. l., как полагали многие авторы^(21, 10, 16, 17, 1-3), а истинные географические и ценоотические расы или, по Ч. Дарвину, виды^(5, 6), связанные каждая с только им свойственными фитоценозами. Они обладают раздельными ареалами и если иногда и заходят узко территориально друг за друга, то никогда не образуют переходных форм (хотя на это указывают С. Коржинский⁽¹⁰⁾ и Е. Бобров⁽¹⁻³⁾). В близких же фитоценозах, например, на степной абразионной платформе Зауралья (как наблюдал М. М. Ильин^(8, 9)), оба этих вида плотно сомкнули свои ряды, образуя резкий биологический барьер, препятствующий их взаимопроникновению.

Прежде всего нужно было выяснить систематическое положение каждой из этих географических рас *T. lupinaster* L. s. l. Линней⁽¹⁵⁾ впервые дает его бином, указывая его распространение только по Сибири. Он ссылается в приводимых синонимах на Гмелина⁽⁴⁾, который приводит его распространение по всей Сибири до Тихого океана, но констатирует его между Красноярском и Енисейском и около Иркутска, откуда, очевидно, им и были сделаны сборы. Эти красноцветные формы Сибири до Забайкалья не отличаются резко от уральских, и поэтому первоначально мы присвоили *T. lupinaster* L. var. α *purpurascens* Ldb. название Линнея — *T. lupinaster* L. s. str. Кремоцветная раса Урала является особым отличным видом и должна быть явно выделена из *T. lupinaster* L. s. l. Указание Д. И. Литвинова⁽¹⁶⁾, что последняя форма — альбинос, неверно. Альбиносы встречаются среди сибирского ареала этого вида, но они редки и не связаны с определенными фитоценозами, т. е. безареальны. И. И. Спрыгин⁽²⁰⁾ указывает из Среднего Поволжья новый кремоцветный вид (без латинского диагноза), названный им *T. ciswolgensense* Spryg. (ined.), так как от Уральского местонахождения он отделен широкой полосой солонцеватых лессинговых ковыльных степей. В настоящее время, после изучения гербарных (весьма малочисленных) экземпляров из Ульяновской и Пензенской обл., временно приходится уральский кремоцветный вид отнести к виду Спрыгина. Поиски М. М. Ильина в 1957 г. в Ульяновской, Пензенской и Куйбышевской обл., а также Саратовской и Сталинградской, в местообитаниях, указанных И. И. Спрыгиным, как и вообще на всем маршруте поисков, не обнаружили этого вида (причине его исчезновения будет посвящено отдельное сообщение). Поэтому нам не удалось собрать семенной материал не только в топотипных местонахождениях, но и вообще во всем Поволжье; следовательно мы не были в состоянии ни ввести его в культуру, ни выяснить его хромосомный аппарат. Указанные два вида лупиновидных клеверов хорошо различаются не только колером цветков, характером местообитания, раздельными ареалами, но и морфологически. Прежде всего они резко выделяются и габитуально, строением куста. У *T. lupinaster* L. s. str. куст раскидистый, полураскидистый или развалистый, в

среднем достигает высоты 15—35 см, а у *T. ciswolgense* — прямостоячий, большей частью высотой 46—62 см (измерения были произведены на 4-летних экземплярах в культуре). У *T. lupinaster* L. s. str. олиственность отмечается обычно по всей длине стебля, а у *T. ciswolgense* Spryg. стебли в нижней части голые, особенно на четвертом году жизни. Цвет листьев у *T. lupinaster* L. s. str. в общей массе темно-зеленый, а у *T. ciswolgense* Spryg. светло-зеленый. Крайне рельефно эти виды отличаются строением подземных частей, от которых зависит и строение куста. От корневой шейки *T. lupinaster* L. s. str. отходят непосредственно под почвой сравнительно длинные многочисленные корневища, большая часть которых на известном отрезке выходит из почвы и дает надземный побег. *T. ciswolgense* Spryg. в области корневой шейки также дают многочисленные почки, но они сразу же принимают положение прямостоячего надземного стебля, не образуя корневищ. Указанные два вида лупиновидных клеверов отличаются и цветом семян: у первого сравнительно светлые с зеленоватым оттенком, у второго с фиолетовым.

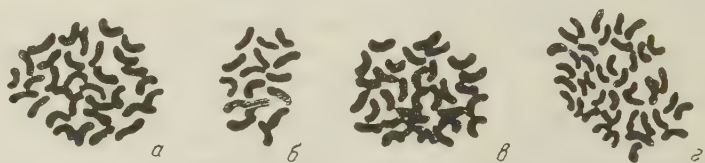


Рис. 1. Соматическое число хромосом у *Trifolium lupinaster* L. s. str., из Южного Урала (а), у *T. ciswolgense* Spryg. из Южного Урала (б), у *T. Litwinowii* Iljin из Воронежской обл. (в) и у *T. lupinaster* L. s. l. с юга Красноярского края (г)

Морфологические черты этих клеверов, приведенные по естественно произрастающим экземплярам, подтверждаются на гербарном материале.

T. ciswolgense Spryg. (по гербарным материалам и литературным источникам, просмотренным критически), произрастающий на Среднем и Южном Урале, после перерыва появляется в Поволжской возвышенности и в Зауральской Западной Сибири, до окрестностей г. Омска, а также в культурном состоянии на наших делянках на научно-опытной станции Ботанического института. Для культуры семена обоих видов были первоначально получены из Пермской обл. Они были высеяны в 1941 г. на одной грядке для проверки их на апомиксис и ксеногамию, так как наблюдения в полевой обстановке показали отсутствие переходных форм в районе наложенных ареалов. В течение ряда лет нами не наблюдалось скрещивания этих видов.

Впоследствии нами были получены новые семена *T. lupinaster* s. str. из Среднего и Южного Урала, из Ильменского заповедника (в 1951 г.) и из Талинского района (в 1952 г.) и *T. ciswolgense* Spryg. из Талинского района (в 1952 г.). В условиях культуры в течение нескольких лет заметно было более раннее, на 2—3 дня, прохождение фаз развития (бутионизация, цветение и плодоношение) у *T. lupinaster* L. s. str., по сравнению с *T. ciswolgense* Spryg. Пробы на апомиксис указанных клеверов при культуре в Отрадном были отрицательны, а на автогамию — дали положительный результат.

Цитологическое исследование, проведенное Н. А. Трухалевой, оправдало предположение о видовой самостоятельности этих клеверов. У *T. lupinaster* L. s. str. $2n = 32$ (рис. 1, а), а у *T. ciswolgense* Spryg. $2n = 16$ (рис. 1 б). Таким образом, первый вид является тетраплоидом, так как основное число хромосом у лупиновидных клеверов 8. Цитогенетическое изучение первого клевера было проведено на 119 препаратах, а второго — на 109. Материалом для исследования служили корешки растений, предварительно пророщенных в чашках Петри. Фиксация производилась хром — формол — уксусной смесью С. Г. Навашина (10 : 4 : 1). Перед фиксацией часть корешков подвергалась обработке оксихинолином. Далее цитологическое исследование проводилось по М. С. Навашину⁽¹⁸⁾. Для окраски препаратов применялся гематоксилин по Гайденгайну.

До сих пор цитологически Г. Карпеченко⁽¹¹⁾ из группы лупиновидных клеверов был изучен лишь один вид — японо-корейский *T. lupinaster* L. s. l. с $2n = 48$ ⁽⁷⁾. Однако Е. Г. Бобров⁽¹⁻³⁾ относит этот японо-корейский вид вместе с дальневосточным Приморья к своему новому виду *T. pacificum* Bobr. Нами цитологически был просмотрен лупиновидный клевер из окрестностей г. Владивостока и было получено $2n = 32$. В связи с таким результатом мы пока затрудняемся отнести изученный нами вид к *T. pacificum* Bobr. или к иному виду лупиновидных клеверов. В гербарии же мы располагаем всего 1—2 экземплярами растений из Кореи и Японии.

Семена владивостокского экземпляра, полученные в 1957 г. от Б. П. Колесникова, были посеяны в Отрадном. Пока можно сказать, что они отличаются оттенком колера цветков и удлинненными фазами развития.

Мы начали изучение дальнейших географических рас *T. lupinaster* L. s. str. Узколистная раса этого клевера из Средне-Русской возвышенности, известная как *T. lupinaster* L. f. *angustifolium* Litw., которую Е. Г. Бобров отнес к *subsp. angustifolium* (Litw.) Bobr., является особым видом. Этот вид был назван в честь Д. И. Литвинова — *T. Litwinowii* Iljin. Он также содержал набор хромосом $2n = 32$ (рис. 1 в). Семена данного вида были собраны в 1957 г. в Воронежской обл., в местности Плющань, на территории заповедника «Галичья гора», среди березняка. Кроме того, нами получены гербарий и семена из лесотундры Северного Урала Коми АССР от И. С. Хантемира — как пурпуроцветные, так и белоцветные; при цитологическом исследовании оба показали хромосомный набор $2n = 32$ (рис. 1 в). Эти географические расы введены в культуру и требуют еще дальнейшего изучения.

Исследования красноцветного клевера из Западных Саян, а также его альбиноса обнаружили число хромосом $2n = 40$ (рис. 1 г), т. е. оба они являются пентаплоидами. Точные данные их сбора следующие: красноцветный клевер — Красноярский край; Минусинский район, оз. Б. Кызыкульское, сосновый ленточный бор на дюнах, 24 VIII 1959 г.; клевер-альбинос — Красноярский край, Западные Саяны, Ермаковский район, около Усинска, луговая степь, 31 VII 1959 г.

Однако нам еще не удалось выяснить морфологию, биологию и цитологию равнинного лупиновидного сибирского клевера, к которому и следует отнести описание Линнея. Поэтому временно за уральскими лупиновидным клевером оставлено название *T. lupinaster* L. s. str. — вплоть до выяснения природы клеверов на территории Красноярск — Енисейск.

Поскольку И. И. Спрыгин не дал латинского диагноза для выделяемого вида, мы даем ему краткий диагноз — *Trifolium ciswolgense* Spryg. *Planta ramis erectis flosculis ochroleucis seminibus leviter violaceis. In planicie excelsa Wolgense.*

Ботанический институт им. В. Л. Комарова
Академии наук СССР

Поступило
8 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. Г. Бобров, Юбилейн. сборн. В. Л. Комарову, Изд. АН СССР, 1939.
- ² Е. Г. Бобров, Флора СССР, 11, Изд. АН СССР, 1945. ³ Е. Г. Бобров, Тр. Бот. инст. им. В. Л. Комарова АН СССР, сер. 1, в. 6 (1947). ⁴ I. G. Gmelin, Flora Sibirica, 4, Petropoli, 1769. ⁵ Ч. Дарвин, Происхождение видов путем естественного отбора, 3, Изд. АН СССР, 1939. ⁶ Ч. Дарвин, Избранные письма, М., 1950.
- ⁷ C. D. Darlington, A. P. Wylie, Chromosome Atlas of Flowering Plants, London, 1955. ⁸ М. М. Ильин, Бот. журн., 38, № 2 (1953). ⁹ М. М. Ильин, Бот. журн., Хроника, 12, № 10 (1957). ¹⁰ С. Коржинский, Tentamen Florae Rossiae Orientalis, St.-Petersbourg, 1899. ¹¹ Г. Карпеченко, Тр. по прикл. бот. и селекц., 14, Л., 1925. ¹² И. М. Крашенинников, М. М. Ильин, Геоботанический очерк горной части Стерлитамакского кантона, Л., 1926. ¹³ C. F. Ledebour, Flora Altaica, 3, Berolini, 1831. ¹⁴ C. F. Ledebour, Flora Rossica, 1, Stuttgartiae, 1942.
- ¹⁵ C. Linnaei, Species plantarum, 2, Holmiae, 1753. ¹⁶ Д. И. Литвинов, Schedae and Herbarium Florae Rossicae, 5, СПб., 1905. ¹⁷ П. Маевский, Флора Средней России, М., 1892. ¹⁸ М. С. Навашин, Методика цитологического исследования для селекционных целей, 2-е изд., М., 1936. ¹⁹ И. В. Новопокровский, Материалы для познания растительности Южного Предуралья, М., 1931. ²⁰ И. И. Спрыгин, Тр. Общества естествоиспытателей при Казанском унив., 4, в. 3, Казань, 1936.
- ²¹ В. Я. Цингер, Сборн. сведений о флоре Средней России, М., 1885.

ЭКОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

М. В. КОЛЕСНИЧЕНКО

**ВЛИЯНИЕ ВЫДЕЛЕНИЙ БЕРЕЗЫ БОРОДАВЧАТОЙ
(*BETULA VERRUCOSA* DENN.) НА ФОТОСИНТЕЗ ДУБА
ЧЕРЕШЧАТОГО (*QUERCUS ROBUR* L.)**

(Представлено академиком А. Л. Курсановым 7 X 1959)

Изучению взаимоотношений растений в природе посвящено много работ (сводку см. в ⁽¹⁾). В основном изучается биофизическая сторона взаимовлияний: затенение, иссушение почвы, потребление питательных веществ и т. п. Однако некоторые факты из жизни леса и опыта лесоразведения свидетельствуют о наличии существенных взаимовлияний, вызываемых выделениями растений, например общеизвестные факты сближения или несближения корневых систем у ряда пород. Изучение этих биохимических взаимовлияний древесных растений только начато, и в практике они пока не учитываются, хотя имеют, несомненно, большое значение в жизни леса.

Установлено, что выделения корней и надземных частей наблюдаются у всех растений. Работами Б. П. Токина (⁽²⁾ и др.), Н. Г. Холодного (⁽³⁾ и др. выяснено, что растительные выделения (по Токину — фитонциды) оказывают огромное влияние на развитие микроорганизмов почвы и атмосферы. Биологическая роль этих выделений в жизни травянистых фитоценозов изучена С. И. Черноб্রивенко (⁽⁴⁾), А. А. Часовенной (⁽⁵⁾ и др. Экспериментальное изучение этой проблемы в лесных сообществах едва затронуто, что объясняется методическими трудностями изучения многолетних древесных растений. Обычные методы лесоводства могут дать ответ об эффективности того или иного смешения пород лишь через несколько десятков лет, практика же лесоразведения, вовлекающая в культуру много экзотов, действительно требует дать уже сейчас рекомендации о наиболее эффективных смешениях древесных пород.

Нами сделана попытка по-новому подойти к изучению биохимических влияний древесных пород — путем учета изменения интенсивности фотосинтеза при воздействии растительными выделениями. Мы исходили из следующих представлений.

Фотосинтез является основным отправлением растений, определяющим в конечном итоге и ростковые процессы. Процесс фотосинтеза — ферментативный и чутко реагирует на изменение условий среды. Растения своими выделениями воздействуют на другие, по-видимому, путем активации или инактивации их ферментативных систем, ускоряя или замедляя различные жизненные процессы, в том числе и фотосинтез.

В наших опытах в качестве объекта воздействия взят дуб черешчатый, как основная порода ползаститного лесоразведения. На него воздействовали выделениями березы бородавчатой; эта порода тоже широко применяется в лесоразведении, иногда в смешении с дубом.

Для опыта весной 1959 г. в плошки высажены однолетки дуба, выросшие в питомнике. Опыты проводились в августе — сентябре, т. е. уже с двухлетками дуба. Дубки все лето содержались на открытой площадке и к опыту имели одну розетку хорошо вызревших листьев. Фотосинтез определялся по количеству усвоенной CO₂ радиометрическим способом. Для этого была смонтирована установка, аналогичная предложенной В. В. Рачинским (⁽⁶⁾), с некоторыми дополнениями. В нашей установке во время опыта кроны

дубков находились под стеклянным колпаком, а площадки под диском треножника (рис. 1). Под колпаком емкостью 14,5 л создавалась концентрация CO_2 в 0,1% и радиоактивность 3 μCi . Лампы дневного света создавали освещенность в кроне дубков 3000 люкс. Экспозиция для фотосинтеза бралась 1 час. Температура под колпаком поддерживалась 24—26°. Влажность почвы в площадках поддерживалась постоянной путем полива до постоянного веса. Дубки за 2 часа до опыта ставились в затемненное место в лаборатории. Фотосинтез каждого дубка определялся один раз в сутки примерно в одни и те же часы. Количество усвоенной CO_2 вычислялось по разнице в уровне радиации газа под колпаком, где был установлен торцовый счетчик типа МСТ-17, подключенный к радиометру типа Б-2.

Таблица 1

Изменение фотосинтеза двухлетнего дуба под воздействием летучих выделений листьев березы

№ дуба	Интенсивность фотосинтеза, мг $\text{CO}_2/\text{дм}^2\cdot\text{час}$		Разность, %
	без воздействия	при воздействии	
3	4,88±0,07	5,78±0,15	+18,2
4	5,18±0,08	5,70±0,08	+11,0
8	4,75±0,24	6,81±0,21	+41,7
9	5,70±1,12	8,22±0,37	+44,0

Примечание. Дубы № 3 и 4 подвергались воздействию выделений 8-летней березы; № 8 и 9 — 30-летней.

Вначале производились контрольные измерения фотосинтеза, затем дубки подвергались воздействию выделений березы, после чего снова определялся фотосинтез. Общее число определений фотосинтеза у каждого дуба колебалось от 6 до 17. Влияния радиации на фотосинтез дуба замечено не было.

Для воздействия летучими выделениями дубок помещался на сутки в остекленную камеру размером 0,5×0,5×0,5 м вместе с букетом березовых веток с листьями. Букет ставился в банку с водой и заменялся через 3—4 дня. Для лучшего истечения газообразных выделений листья березы слегка повреждались. В камере имелись отверстия для вентиляции (внизу и сверху).

Для получения корневых выделений выкапывалась на питомнике 3-летняя береза и ставилась обнаженными корнями в банку емкостью 0,5 л, налитую водой до половины. Березки менялись через 2—3 дня. За 2 часа до опыта дубки поливались 100 мл воды, взятой из этой банки; предполагалось, что в ней содержатся и корневые выделения березы.

Результаты опытов по воздействию на дуб летучих выделений березы, приведенные в табл. 1, показывают существенное увеличение фотосинтеза дуба при воздействии летучими листовыми выделениями березы, причем воздействие взрослых берез оказалось более сильным, чем молодых.

Результаты опытов по воздействию корневыми выделениями, приведенные в табл. 2, свидетельствуют о весьма существенном снижении фотосинтеза дуба под воздействием корневых выделений березы.

Таблица 2

Изменение фотосинтеза двухлетнего дуба под воздействием корневых выделений березы

№ дуба	Интенсивность фотосинтеза, мг $\text{CO}_2/\text{дм}^2\cdot\text{час}$		Разность, %
	без воздействия	при воздействии	
2	6,78±0,08	5,40±0,32	—20,0
5	8,00±0,08	6,43±0,07	—21,5
7	7,15±0,20	5,48±0,05	—23,3
10	7,10±0,55	5,52±0,32	—22,5

Примечание. Корневые выделения во всех случаях от 3-летних березок.

Таблица 3

Изменение фотосинтеза двухлетнего дуба при одновременном воздействии корневых и летучих листовых выделений березы

№ дуба	Интенсивность фотосинтеза, мг $\text{CO}_2/\text{дм}^2\cdot\text{час}$		Разность, %
	без воздействия	при воздействии	
3	4,88±0,07	3,60±0,43	—26,5
8	4,75±0,24	5,82±0,10	+22,0

Представляет большой интерес выявленная двойственность во влиянии березы на дуб: листовые выделения повышают фотосинтез, а корневые подавляют его.

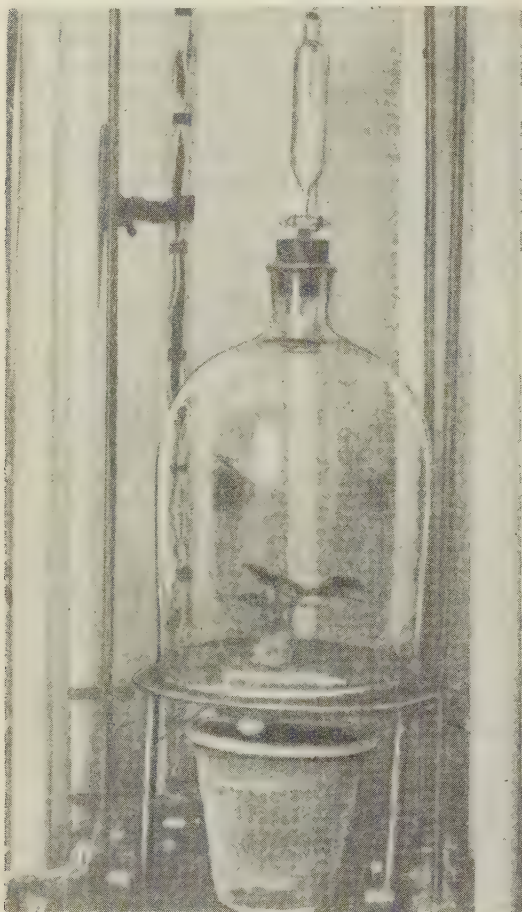


Рис. 1. Установка по определению фотосинтеза; лампы раздвинуты

Приведенные наблюдения позволяют сделать заключение о качественной стороне влияния березы; количественная сторона, по-видимому, будет зависеть от дозы воздействия и возраста растений.

Результаты суммарного воздействия выделений корней и листьев, полученные по той же методике (см. табл. 3), противоречивы и не дают основания для определенного заключения об эффекте суммарного влияния выделений березы. Это объясняется, по-видимому, тем, что испытываемые дубки подвергались воздействию летучих выделений разных по возрасту берез: дуб № 3—8-летней, а дуб № 8—30-летней; корневые же выделения в обоих случаях брались от 3-летних берез. Несмотря на некоторую противоречивость наблюдений, все же можно полагать, что влияние корневых выделений сильнее, чем летучих листовых. Это подтверждается на примере дуба № 3, который подвергался воздействию березок близкого возраста, а также резким (вдвое) снижением эффекта воздействия листовых выделений 30-летней березы под влиянием корневых выделений 3-летней березы у дуба № 8.

Можно полагать, что предлагаемый нами метод позволит сравнительно быстро¹ дать рекомендации наиболее целесообразных смесей древесных пород при разном² числе компонентов.

Воронежский сельскохозяйственный институт

Поступило
6 X 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Н. Сукачев, Ботан. журн., 38, № 1 (1953). ² Б. П. Токин, Губители микробов фитонциды, М., 1954. ³ Н. Г. Холодный, Бюлл. МОИП, 13, в. 1 (1948). ⁴ С. И. Чернобрюнко, Биологическая роль растительных выделений и межвидовые взаимоотношения в смешанных посевах, М., 1956. ⁵ А. А. Часовенная, Сборн. Фитонциды, 1957. ⁶ В. В. Рачинский, Физиология растений, 2, в. 2 (1955).

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. И. СЛОВИКОВСКИЙ

**ЗНАЧЕНИЕ МИНЕРАЛИЗАЦИИ И ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ
ОРГАНИЧЕСКОГО ОПАДА ДРЕВЕСНЫХ И КУСТАРНИКОВЫХ
ПОРОД ДЛЯ ПИТАНИЯ РАСТЕНИЙ**

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 22 VIII 1959)

В настоящей работе мы приводим данные о выщелачивании зольных веществ из листьев древесных и кустарниковых растений (^{1,2}).

Из полученных нами данных видно, что вымывание фосфорной кислоты из хвои и листьев происходит в самой начальной стадии их разложения. У большинства пород черешчатого дуба (ранней и поздней формы), граба, зеленого ясеня, остролистого и серебристого клена, березы, грецкого ореха, обыкновенного ясеня, бука, береста, осокоря, черной ольхи, гледичии, обыкновенной сосны и сибирской лиственницы, желтой акации, скумпии, лещины, бородавчатого и европейского бересклета за 4 месяца осенне-зимними и весенними осадками выщелачивается из листьев от 20 до 50% P_2O_5 .

С увеличением времени минерализации с 4 до 10,5 мес. вымывание фосфора из листьев также увеличивается (в среднем в 1,5—2,5 раза). Степень разложения органического опада не оказывает существенного влияния на скорость вымывания фосфорной кислоты. Поэтому мы имеем основание утверждать, что фосфор, заключающийся в опаде, находится как в форме легкорастворимых солей, которые при первых дождях быстро вымываются из органического опада, так и в форме прочных органических соединений. В летний период, несмотря на большое количество осадков (233 мм) по сравнению с осенне-зимним периодом (113 мм) фосфорной кислоты вымывается относительно меньше. Повышенная интенсивность выщелачивания фосфорной кислоты при низких температурах, возможно, объясняется тем, что промывные воды весной и осенью содержат максимум растворенной углекислоты, которая способствует преобразованию труднорастворимых солей фосфора в соли легкорастворимые. В теплый период времени углекислота освобождается из раствора и выщелачивание фосфорной кислоты замедляется, хотя интенсивность разложения органического опада велика.

Что касается азота, то его выщелачивание из органического опада, особенно в начале опыта, протекает, менее интенсивно (в 10—20 раз), чем выщелачивание фосфорной кислоты. Например, за осенне-зимний и весенний периоды (4 мес.) из опада большинства пород атмосферными водами вымывается азота всего лишь от следов до 4%. Опад остальных пород: скумпии, черной бузины, европейского и бородавчатого бересклета, желтой акации — за холодный период времени теряет азота 4,5—12,6%. Это свидетельствует о том, что азот органических веществ прочно связан и входит в состав белковых соединений, которые почти не растворяются атмосферными осадками.

В наших опытах в минерализующихся листьях наблюдается значительная прибавка валового азота. Например, в опаде красного дуба, бука, зеленого ясеня, остролистого и полевого клена, осины, береки, граба и гледичии (в лизиметрическом опыте за 10,5 мес.) увеличивается содержание валового азота на 12—40%. Это увеличение азота в остатках от разложения органического опада было показано еще С. Кравковым (³). Оно происходит за счет атмосферного азота в результате деятельности фиксирующих азот микроорганизмов.

Наши исследования показали, что фиксация азота проявляется не только в увлажненном опаде листьев, но даже и в воздушно сухих при более длительном времени хранения. Например, в листьях бука после 2-годичного хранения в неотапливаемом помещении валовой азот увеличился на 23 %, что было нами установлено в 1951 г. на опаде, собранном в 1949 г. Фиксаторы азота проявляют свою деятельность на листьях не всех пород. В листьях обыкновенного ясеня, береста, липы, серебристого клена, белой и желтой акации, черной бузины, европейского и бородавчатого бересклета и др. наблюдается уменьшение количества валового азота. Что касается листьев черешчатого дуба, то в одних опытах (лизиметрических) наблюдается незначительное увеличение азота, а в других (лабораторных) — убыль его. Это остается непонятным и требует дополнительных исследований, в первую очередь микробиологических.

Потери азота опадом в наших опытах следует отнести за счет аммиака, выделившегося при разложении листьев в процессе аммонификации. Это подтверждается как нашими агрохимическими, так и микробиологическими исследованиями А. П. Визира. Например, 1 кг смеси песчаной почвы с опадом желтой акации (100 г почвы + 5 г листьев) за 40 дней образует аммиака 630 мг, с опадом черной бузины 450 мг, с опадом граба 83 мг и без примеси опада (контроль) 62 мг. Как видно, особенно стимулирует развитие в почве аммонифицирующих бактерий, и в частности образование аммиака, опад черной бузины и желтой акации. Эти породы выделены нами в отдельную группу ⁽¹⁾ как сильные подщелачиватели.

Выделившийся от разложения органического опада аммиак может оказать физико-химическое влияние на лесную почву. С одной стороны, он будет влиять на реакцию почвы (в направлении ее большего или меньшего подщелачивания — в зависимости от породы и минерального состава почвы), а с другой, он образует с угольной и другими кислотами аммонийные соли, которые очень динамичны и легко усваиваются растениями. Взаимодействие аммиака с угольной кислотой приведет почву к обогащению ее углеродом и азотом.

Таким образом, учитывая специфические особенности различных пород по характеру выщелачивания солей из опада, фосфорной кислоты и азота, мы приходим к выводу, что путем смешения пород возможно создать такую подстилку, которая повысит плодородие почв под лесонасаждениями.

Величины выщелачивания сырой золы из минерализующегося опада также варьируют. По нашим данным, за 4 мес. в холодный период года выщелачивание сырой золы из листьев и хвои в общем вдвое больше, чем выщелачивание азота. Листья обыкновенного и зеленого ясеня, береста, остролистого клена, грецкого ореха, черной ольхи, белой и желтой акации, европейского и бородавчатого бересклета, черной бузины и скумпии за этот период теряют от 10 до 26 % сырой золы (определено в водных вытяжках). Опад других пород — обыкновенной сосны, сибирской лиственницы, черешчатого дуба (ранняя и поздняя формы), красного дуба, бука, граба, липы, полевого и серебристого клена, березы, осины, осокоря, амурского бархата, береки и лещины — теряет золы 1—9 %. Наименьшее вымывание золы из опада (1—2 %) в зимний период наблюдается в листьях дуба и хвое сосны.

Наблюдения за процессом выщелачивания сырой золы из листьев мы провели в лизиметрах Н. Н. Степанова * на протяжении 10,5 мес. Опад находился во время опыта в условиях, соответствующих естественным. Сырая зола определялась в свежих листьях перед закладкой опыта и в минерализованных после опыта, сжиганием при 600° в муфельной печи. Результат опыта приведен в табл. 1. Убыль, т. е. выщелачивание, золы обнаруживается в листьях береста, амурского бархата, европейского бересклета и черной бузины. В опаде остальных 26 пород количество золы возросло.

* Площадь лизиметра 0,1 м². Загрузка лизиметра составляла 100 г абсолютно сухой массы листьев.

Таблица 1

Вымывание сырой золы из листьев за 10,5 мес. в лизиметрах Н. Н. Степанова

Растение	Содерж. золы в г на 100 г абс. сух. массы		Вымывания в %	Растение	Содерж. золы в г на 100 г абс. сух. массы		Вымывания в %
	в свеж. листьях	в листьях после выщелач.			в свеж. листьях	в листьях после выщелач.	
Сосна обыкновенная	2,6	5,8	+123,1	Осина	10,0	17,8	+78,0
Лиственница	10,9	12,5	+14,7	Осокорь	11,5	17,4	+51,3
Дуб черешчатый (ран. форма)	7,9	12,5	+58,2	Орех грецкий	8,8	13,1	+48,9
Дуб черешчатый (поздн. форма)	7,5	13,4	+78,7	Бархат амурский	17,9	16,8	-6,2
Дуб красный	6,2	11,7	+88,7	Берека	16,0	16,8	+68,0
Бук	10,4	14,9	+43,3	Ольха черная	8,5	14,2	+67,0
Граб	9,1	15,3	+68,1	Ива белая	9,9	13,2	+33,3
Ясень обыкновенный	10,5	11,1	+5,7	Акация белая	11,8	13,4	+13,6
Ясень зеленый	9,5	14,8	+55,8	Гледичия	13,0	14,1	+8,5
Липа	8,9	14,0	+57,3	Акация желтая	10,7	12,0	+12,1
Берест	20,2	17,1	-15,3	Бересклет бородавчатый	10,6	13,3	+25,5
Клен остролистный	12,5	19,9	+59,2	Бересклет европейский	12,5	11,8	-5,6
Клен полевой	13,0	20,8	+60,0	Бузина черная	14,5	14,1	-2,8
Клен серебристый	12,7	21,0	+65,3	Лещина	13,2	21,3	+61,3
Береза	7,2	12,6	+75,0	Скумпия	8,6	16,7	+94,2

Для проверки полученных результатов мы поставили дополнительные лабораторный опыт, в который был взят опад четырех древесных (листьев черешчатого и красного дуба, бука и граба) и двух кустарниковых (европейского бересклета и черной бузины) пород, как наиболее характерных.

Воздушно-сухие листья (20 г) были помещены в воронки Бюхнера. Дважды в день при помощи пульверизатора листья увлажнялись дистиллированной водой (по 50 мл на воронку). Были приняты меры для предупреждения попадания пыли из воздуха. Исследование продолжалось 40 дней. Динамика выщелачивания сырой золы видна из табл. 2. В этом опыте процесс выщелачивания сырой золы из листьев древесных растений протекает более или менее равномерно на протяжении всего времени исследования. У кустарниковых пород (европейского бересклета и черной бузины) интенсивное выщелачивание золы наблюдается только в первой части опыта (на 16 день), во второй части (на 40 день) оно меньше. Общее количество вымываемой за 40 дней золы достигает в среднем по породам 23—61%. Скорость выщелачивания сырой золы в лабораторных условиях (при 18—20°) в два-три раза больше, чем в естественных условиях (в осенне-зимний период года). Это объясняется огромной ролью тепла в процессе разложения органических остатков.

Баланс выщелачивания (табл. 3) показал, что и в этом опыте наблюдается увеличение сырой золы. Более всего увеличивается содержание золы в листьях черной бузины и бука (23,6—26,7%) и незначительно (6,4%) — в листьях черешчатого дуба. В той или иной степени увеличение сырой золы происходит в листьях всех пород — как кустарниковых, так и древесных.

Данных о повышении валового содержания сырой золы в листьях при их минерализации в литературе почти нет. А. К. Ярцева ⁽⁴⁾ отмечает, что в течение 18 мес. минерализации валовое содержание золы в листьях дуба уве-

Таблица 2

Динамика выщелачивания сырой золы в лабораторном опыте

Растение	Определено в фильтрах в г на 100 г абс. сух. массы		
	16 день опыта	40 день опыта	за время опыта
Дуб черешчатый	0,92	1,08	2,00
Дуб красный	0,75	1,72	1,47
Бук	1,01	1,20	2,21
Граб	1,71	1,29	3,00
Бересклет европейский	3,35	2,21	5,56
Бузина черная	7,87	2,27	10,14

личилось с 6,6 до 19,9%, а в опаде хвои лиственницы с 21,2 до 30,0% А. И. Зражевский⁽⁵⁾ ссылается на наши данные.

Анализируя полученные данные с точки зрения возможных химических реакций, протекающих в листьях в процессе их минерализации, можно прийти к заключению, что увеличение валового содержания золы зависит от состава зольных элементов и их химической природы. Большим увеличением золы отличаются те породы, опад которых содержит большой процент щелочных и щелочноземельных металлов, а также железа. Увеличение содержания

Таблица 3

Баланс вымывания сырой золы в лабораторном опыте

Растение	Содерж. в г на 100 г абс. сух. массы		Вымывание в %	Содерж. в листьях после вымывания		Баланс вымывания в %
	валов. в свеж. листьях	в фильтратах		в г на 100 г абс. сух. массы	в % от валов. содерж.	
Дуб черешчатый	8,60	2,00	23,3	7,15	83,1	+ 6,4
Дуб красный	6,18	1,47	23,8	5,69	92,1	+15,9
Бук	10,85	2,21	21,3	11,00	106,3	+27,6
Граб	7,59	3,00	39,5	5,85	77,1	+16,6
Бересклет европейский	12,49	5,56	44,5	9,20	73,7	+18,2
Бузина черная	16,53	10,14	61,3	10,30	62,3	+23,6

сырой золы в листьях пород в процессе минерализации идет за счет присоединения других элементов, в основном углерода и кислорода. Например, при озолении свежего опада (методом сжигания при 600°) образуются преимущественно окислы элементов, входящих в состав опада. Окислы металлов и частично другие соединения (соли) составляют сырую золу. В результате же длительного процесса естественного разложения, минерализации, в озоленном опаде будут содержаться не окислы металлов, а их стойкие соли — карбонаты с более высоким молекулярным весом, которые и определяют прибавку веса золы за счет присоединившегося углерода и кислорода. При прокаливании сырой золы при высокой температуре (900—1000°) вес ее уменьшается за счет разрушения карбонатов с отщеплением углекислого газа.

Следовательно, мы имеем все основания полагать, что это увеличение валового содержания сырой золы происходит, в первую очередь, за счет присоединения углерода и кислорода, которые выделяются из органических остатков при их разложении.

Дополнительное вовлечение в кругооборот веществ углерода и кислорода при помощи некоторых металлов, содержащихся в опаде древесных пород несомненно имеет положительное значение для питания древесных растений. Поэтому целесообразно периодическое внесение под лесонасаждения солей щелочноземельных и других металлов в качестве аккумуляторов углерода и кислорода. Этот вопрос заслуживает дальнейшего экспериментального изучения.

Отделение химических и геологических наук
Академии наук УССР

Поступило
22 VIII 1959

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. С л о в и к о в с к и й, ДАН, 117, 519 (1958); Доповіді АН УРСР, 3, 293 (1957) Доповіді Укр. Акад. сільськогоспод. наук, 4, 3 (1958). ² П. С. П о г р е б н я к, А. І. З р а ж е в с ь к и й, В. І. С л о в і к о в с ь к и й, Праці Інст. лісівн. АН УРСР, 3, 104 (1952) ³ С. П. К р а в к о в, Исследование в области изучения роли мертвого растительного покрова в почвообразовании, СПб, 1911. ⁴ А. К. Я р ц е в а, Докл. Московск. с.-х. акад. им. К. А. Тимирязева, в. 4 (1946). ⁵ А. И. З р а ж е в с к и й, Дождевые черви как фактор плодородия лесных почв, Киев, 1957.

С. И. МАЛЫШЕВ

**ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ И РАЗВИТИЯ АРХАИЧЕСКИХ
НАЕЗДНИКОВ ГАСТЕРУПЦИЙ (HYMENOPTERA, GASTERUPTIIDAE)**

(Представлено академиком Е. Н. Павловским 18 I 1960)

В далеко разобщенных друг от друга надсемействах наездников (Terebrantia) сохранились следы организации их отдаленных предков. Это отражается не только в строении, но, не в меньшей мере, и в биологии их носителей. Отсюда вопрос о жизни и развитии архайческих наездников имеет важнейшее значение для выяснения исходной фазы эволюции паразитоидных перепончатокрылых, возникших, как известно, от исконой растительноядных форм, Phytophaga (⁶).

К числу таких примитивных наездников принадлежит и семейство Gasteruptiidae, образующее вместе с Evaniidae и Aulacidae надсемейство Evanoidea. Доминирующим по числу видов (около 3000) среди всех эваноидных наездников является космополитический род Gasteruption Latr.

Имеющиеся в науке сведения о жизни гастерупций до сих пор еще крайне ограничены. Так, совершенно недостает определенных данных о яйцах, откладываемых гастерупциями, о способе и месте их откладки, о новорожденной личинке и о ее питании, а также о питании растущих личинок и о их возрастных изменениях. Несмотря на это принимается, что все личинки гастерупций — эктопаразиты взрослых личинок одиночных ос и пчел, а это в основном не совпадает с данными, полученными автором.

Для сбора материала по биологии гастерупций автор применял в широком масштабе различные приманочные установки, отчасти описанные им раньше (³). Благодаря этому были собраны обстоятельные сведения о жизни и развитии ряда видов гастерупций, а именно: *G. rugulosum* Ab., *G. thomsoni* Schlett., *G. caudatum* Szepl. и *G. pyrenaicum* Szepl., и частью — *G. foveolum* Szepl. и *G. hungaricum* Szepl.

При заражении гнезд самки всех наблюдавшихся видов обнаружили приверженность к тем или иным определенным хозяевам. Так четыре из названных гастерупций (*G. rugulosum*, *G. thomsoni*, *G. foveolum* и *G. hungaricum*) встречались лишь в гнездах примитивных пчел коллетид — *Colletes* и *Hyblaesus*; один вид (*G. pyrenaicum*) — в гнездах цератин, *Ceratina callosa* F. и реже *C. cyanea* K., и один (*G. caudatum*) — в гнездах *Osmia parvula* Duf. et Perr. и реже — *O. leucomelaena* K.

На основании ряда данных надо заключить, что откладка яиц гастерупциями производится через входное отверстие заражаемого гнезда; при этом яйцо откладывается в снабженную уже провизией и яйцом ячейку пчелы, обычно через крышку ячейки, а иногда чрез ее устье.



Рис. 1. Хлебец *Ceratina cyanea* K. с яйцом пчелы (слева) и яйцом *Gasteruption pyrenaicum* Guér. (справа)

В ячейки *Ceratina* и *Osmia* (содержащие более или менее оформленную, тестообразную провизию с яйцом пчелы-хозяйки, прикрепленным к «хлебцу») гастерупции откладывают свое яйцо или непосредственно на яйцо пчелы или на медвяную провизию недалеко от него (рис. 1). Наоборот, в ячейках *Nylaeus* и *Colletes* (содержащих неформленную, полужидкую медвяную провизию) не наблюдалось, чтобы яйцо гастерупций откладывалось на яйцо пчелы-хозяйки, но всегда в стороне от него и не на провизию, а лишь возле нее; яйцо же *G. rugulosum* было неоднократно найдено даже снаружи пленчатой стенки ячейки гилей, под ее внешней обмазкой.

Палочковидное, слегка согнутое яйцо *Gasteruption* имеет длину от 1,25 мм (у *G. rugulosum*) до 2,25 (у *G. thomsoni*) при наибольшей ширине 0,25—0,5 мм (рис. 2). Оболочка яйца матовая, шагринированная. Головной конец его широкий, округлый, а задний более тонкий, конический, без стебелька; но в дальнейшем, перед вылуплением личинки, задний конец хориона пустеет и делается похожим на стебелек.

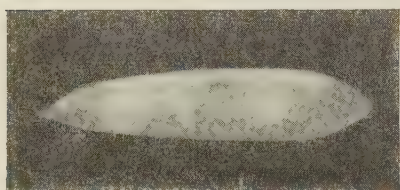


Рис. 2. Яйцо *Gasteruption pyrenaicum* Guér.

Вылупление личинки происходит на 2 или 3 день после откладки яйца. Новорожденная личинка гастерупции — с большой почти квадратной головой, несущей хорошо заметные антенны (рис. 3). Тело ее блестящее, голое, заостряющееся кзади и заканчивающееся короткой вилочкой, заметной лишь при движениях личинки. На брюшной стороне личинки, при рассматривании ее в профиль, заметны «микроподии» — парные выступы, похожие на абдоминальные конечности молодых личинок пилильщиков (*Pontania*).



Рис. 3. Личинка *Gasteruption pyrenaicum* Guér. I возраста

При перемещении новорожденная личинка не сгибается другой, как гусеница пяденицы, и не становится на задний конец, как планидия, но, приподняв переднюю половину тела и слегка откинув ее назад, направляет голову вперед, куда и подтягивает остальное тело. Эти движения в том же порядке повторяются. В результате личинка легко может уйти из вскрытой ячейки. Иногда в одну и ту же ячейку может быть отложено не одно, а два яйца гастерупции, из которых остается только одно.

По выходе из яйцевой оболочки личинка гастерупций (*caudatum*, *pyrenaicum*) обычно быстро находит яйцо пчелы. Устроившись на нем продольно, она прокалывает весьма тонкую его оболочку острыми шиловидными жвалами. Через полсутки или около того высасывается все содержимое яйца пчелы, а опустевшая оболочка его остается на месте, едва заметная снизу личинки гастерупции. Тело последней теперь сильно вздувается, сегментация почти полностью исчезает и голова кажется уже относительно очень маленькой.

Личинка *G. rugulosum*, выйдя из яйца, отложенного снаружи выстилки ячейки, прогрызает крошечное отверстие в пленчатой стенке ячейки у ее заднего края и подползает к палочковидному яйцу гилей, плавающему на поверхности полужидкой медвяной кашицы. Новорожденная личинка *G. thomsoni* в наблюдавшихся случаях не трогала яйца *Colletes*, подвешиваемого у этих пчел к потолку ячейки. Вылупившаяся из яйца личинка коллета сгибается дугой, переползает на полужидкую кашицу и плавает на ней, согнувшись кольцом. Дальнейшего развития личинки коллета в зараженной ячейке, одного не происходило, она погибала без видимой причины, а труп ее оставался нетронутым.

В соответствии с указанными различиями дальнейшее развитие и питание личинок тех и других гастерупций происходит по-разному. Личинки II возраста, *G. caudatum* и *G. pyrenaicum*, находясь на провизии на том же самом месте, где нормально питаются и личинки-хозяйки, очень похожи на последних и по внешности, так что при беглом взгляде легко могут быть смешаны с ними. Но этого нельзя сказать про личинок II возраста *G. rugulosum* и *G. thomsoni*, так как они не лежат на поверхности меда боком, согнувшись в кольцо, как личинки гилей и коллетов, но, в отличие от них, плавают на брюшной стороне в прямом положении.

Не достигнув и половины своего полного роста, личинки гастерупций переходят в III возраст. Теперь их поведение и внешность резко меняются.

Прежде всего, с этого момента у личинок гастерупций открывается сообщение средней кишки с задней и начинается дефекация. Выделенные ими комочки экскрементов подобны таковым их хозяев-личинок пчелиных, хотя в дальнейшем они образуют иногда целые цепочки, похожие на таковые личинок ос сапиг (*Sapygidae*), питающихся тоже медвяной пищей. Головным концом полувзрослые личинки гастерупций направляются теперь в сторону дна ячейки и углубляются в провизию. На их средних сегментах — как по бокам тела, так и со спины — появляются рельефные выпячивания, то сосцевидные, то столбикообразные (рис. 4).

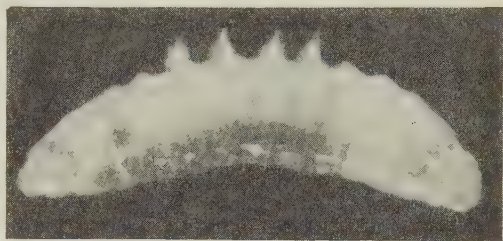


Рис. 4. Личинка *Gasteruption pyrenaicum* Guér. III возраста

В дальнейшем, по мере того как личинки подрастают и покровы их растягиваются (особенно в ширину), форма и размеры этих выпячиваний значительно меняются. В конечном счете они становятся ниже и шире, а иногда и совсем исчезают (например, спинные выпячивания взрослых личинок *G. pyrenaicum*), но порою они все же остаются как характерные черты (например, боковые выступы личинок *G. caudatum* и *G. thomsoni*).

Личинки гастерупций, развивающиеся в гнездах с рыхлыми или слабыми перегородками, истребив запас провизии в одной ячейке, проникают нередко в соседнюю, а иногда и дальше, где уничтожают все содержимое ячеек, а в том числе и личинок пчелы-хозяйки. При этом они ведут себя не как паразиты, постепенно высасывающие соки жертвы, но как настоящие хищники, поедающие добычу так, что от нее через немного часов остаются лишь растерзанные покровы и пустой череп. Во многих случаях этого, однако, не бывает, и личинки различных видов гастерупций ограничиваются лишь медвяным запасом, заготовленным в одной ячейке.

По окончании питания личинки гастерупций не делают настоящего кокона, но лишь изолируют себя одной или двумя поперечными перегородками в опустошенном и тщательно очищенном от мусора участке гнезда. В качестве строительного материала они применяют при этом вязкую коричневую массу, выделенную из кишечника и наносимую иногда на стенки всей полости, но без применения шелковистых нитей. В таких примитивных «полукоконах» они и зимуют.

Неоднократно наблюдалось, что личинки *G. pyrenaicum* вскоре после изготовления полукоконов окукливаются и, спустя всего 4—5 недель по выходе из яйца, окрыляются, давая таким образом второе поколение в году.

Из изложенного следует, что гастерупции не эктопаразиты, как принималось до сих пор (¹, ⁹, ⁷), а типичные инквилины и притом — только пчелиных. Указание, что гастерупции развиваются и в гнездах некоторых одиночных ос, надо признать ошибочными, основанными на неточности наблюдений, — и в случае получения гастерупций из смешанных пчелино-

осиных гнезд, нередко встречающихся в природе. Подобная ошибка выяснилась, как известно, и в отношении инквилинизма сапиг⁽⁸⁾.

Среди примитивных наездников почти одни только Gasteruptiidae сохранили в своем поведении характерные черты архаических наездников, развивавшихся как инквилины в галлах цефоидных пилильщиков⁽⁶⁾. Родственные гастерупциям Evaniidae перешли в фазу оофагов, а мало известные биологически Aulacidae, а также и Orussidae являются, по-видимому, — подобно известным Ibalinae — метапаразитами, заражающими яйца ксилофагов, но развивающимися за счет их более или менее взрослых личинок. Что касается Trigonalidae, то это — паразитоиды, абэррантно уклонившиеся от тех же общих предков наездников архаических инквилинов^(5, 6).

Переход примитивных Gasteruptiidae к заражению гнезд предков пчелиных надо отнести к середине мелового периода, когда происходила смена древних, голосеменных, растений новыми, покрытосеменными, и когда сопряженно с этим шло развитие веспоидных и сфекоидных пчелиных⁽⁴⁾. На действительную возможность и даже известную легкость такого перехода указывает наличие среди других надсемейств наездников таких родов, как Eurytoma, одни представители которых (*E. aciculata* Ratz.) развиваются в галлах пилильщиков, а другие (*E. robusta* Mayr) — в ячейках одиночных пчел, хотя самое питание и развитие в том и другом случае происходит уже несколько иначе⁽²⁾.

Институт эволюционной физиологии
им. И. М. Сеченова
Академии наук СССР

Поступило
15 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н ö р р н е р, Allgem. Zs. Entomol., 9, 97 (1904). ² О. М. Иванова-Казас, Энтом. обозр., 37, в. 1, 5 (1958). ³ S. J. Malyshev, E. Abderhalden Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Abt. 9, 329 (1932). ⁴ С. И. Малышев, Тр. Всесоюзн. энтомол. общ., 43, 83 (1951). ⁵ С. И. Малышев, ДАН, 109, 5 (1956). ⁶ С. И. Малышев, Перепончатокрылые. Их происхождение и эволюция. М., 1959. ⁷ E. G. Linsley, Hilgardia, 27, 19 (1958). ⁸ V. S. Pate, Acta Zool. Lilloana, 4, 393 (1947). ⁹ O. Schmiedeknecht, Die Hymenopteren Nord- und Mitteleuropas, Jena, 1930.

Н. П. ТАРНАВСКИЙ

О ГИБРИДЕ ДНЕПРОВСКОГО РЫБЦА И ГУСТЕРЫ
BLICCA BJOERKNA (L.) × VIMBA VIMBA VIMBA NATIO
CARINATA (PALL.)

(Представлено академиком Е. Н. Павловским 18 I 1960)

Первые упоминания о гибриде днепровского рыба (Vimba vimba vimba natio carinata (Pall.) и густеры (Blicca bjoerkna (L.)) находим у В. Исаенко⁽³⁾, К. Кесслера⁽⁴⁾ и Л. Сабанеева⁽⁵⁾, причем Кесслер назвал его «густирным рыбом». Морфологическое описание его по одному экземпляру дал Д. Белинг⁽¹⁾. Позднее эти данные были использованы Л. С. Бергом⁽²⁾. Каких-либо новых данных по формологии и биологии гибрида густеры и рыба в литературе не имеется.

Материалом для настоящей статьи послужили сборы и наблюдения автора, проведенные на нижнем Днепре и Днепровско-Бугском лимане в 1953—1956 гг., во время изучения биологии днепровского рыба⁽⁷⁾.

Описание гибрида выполнено по 126 экземплярам рыб. Кроме того, обработано биометрически 60 экземпляров рыба и 77 — густеры. Для анализа подбирались рыба приблизительно равных размеров (в пределах 16,1—24,0 см). Измерения производились по 28 пластическим признакам по схеме Л. Ф. Правдина⁽⁵⁾, вычисление элементов вариационных рядов было сделано по таблицам и номограммам Морозова.

Анализ вариационных кривых изменчивости отдельных меристических признаков не дает оснований считать всех исследованных нами рыб гибридами первого поколения. В промысловых уловах, вероятно, имеются гибриды последующих поколений, в том числе и их возвратные формы, так как довольно часто встречаются гибридные особи, почти не отличающиеся от одного из исходных родительских видов.

Поскольку имеет место трансгрессия показателей отдельных признаков у типичных форм гибридов, а также у рыба и густеры гибридного происхождения в результате возвратных скрещиваний, полученные нами данные являются характеристикой промыслового стада «густирного рыба» нижнего Днепра и Днепровско-Бугского лимана.

Сравнение меристических признаков (табл. 1) показывает, что «густирный рыба» имеет одинаковое с исходными формами число жестких и мягких лучей в спинном плавнике.

Таблица 1

Сравнение меристических признаков «густирного рыба» и исходных форм

Признак	Густера × рыба		Рыба		Густера	
	n	формула	n	формула	n	формула
Число лучей в D	129	III 8(9)	182	III 8 (7) (9)	77	III (7) 8 (9)
Число лучей в A	123	III (16; 18; 19) 20—22 (23; 24) M = 20,65	180	III (17) 18—20 (21) M = 19,14	77	III (19; 20) 21—22 (23; 24) M = 21,43
Боковая линия	127	45 $\frac{9-10}{5-6}$ 57 M = 52,72	179	53 $\frac{9-11}{4-6}$ 61 M = 57,09	76	46 $\frac{8-10}{5-6}$ 53 M = 48,35
Глоточные зубы	120	1.5—5.1 (1.5—5; 5—5.1; 1.5—5.2; 2.5—5.1; 2.5—5.2)	200	5—5	76	2.5—5.2 (3.4—5.2)
Число лучей в P	37	I 14—18 (19)	—	—	—	—
Число лучей в V	36	II 8—10	—	—	—	—

Сравнение пластических признаков «густирного рыба» и исходных форм

	Рыбец		Густера		Рыбец × густера		$\frac{M_1 - M_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$	$\frac{M_2 - M_3}{\sqrt{m_2^2 + m_3^2}}$
	n	$M \pm m$	σ	n	$M \pm m$	σ		
Длина тела (l), см	60	20,42±0,23	1,79	77	19,46±0,46	1,39	126	1,63
В п р о ц е н т а х к д л и н е т е л а (l)								
Панбо́льшая высота тела	60	26,67±0,15	1,49	77	38,22±0,48	1,62	126	2,03
Панме́ншая высота тела	60	9,44±0,08	0,63	77	10,91±0,08	0,67	126	0,68
Наибольшая толщина тела	60	41,36±0,09	0,68	77	43,53±0,10	0,91	126	0,72
Наименьшая толщина тела	47	4,55±0,10	0,68	77	4,75±0,08	0,73	86	0,76
Анте́дорсальное расстояние	60	51,65±0,17	1,31	77	57,01±0,48	1,55	126	1,71
Анте́анальное расстояние	60	68,44±0,31	2,44	77	67,72±0,19	2,41	126	0,4
Постдо́рсальное расстояние	60	39,65±0,19	1,48	77	35,57±0,25	2,16	126	2,22
Анте́вентральное расстояние	13	46,93±0,39	1,39	2	45,64	—	41	1,55
Длина хвостового сте́бля	60	44,45±0,19	1,45	77	42,23±0,20	1,78	126	1,36
Длина основания D	60	10,68±0,10	0,80	77	12,69±0,08	0,73	126	0,89
Высота D	60	22,73±0,16	1,29	77	28,34±0,18	1,55	126	1,76
Длина основания A	60	20,32±0,16	1,28	77	25,99±0,19	1,65	126	1,35
Высота A	60	14,45±0,13	1,05	77	19,03±0,16	1,42	126	1,52
Длина P	60	17,82±0,11	0,83	77	19,48±0,13	1,20	126	1,09
Длина V	60	16,08±0,11	0,86	77	17,44±0,11	0,98	126	1,04
Расстояние P — V	60	24,33±0,17	1,33	77	24,79±0,15	1,36	126	1,39
Расстояние V — A	60	21,68±0,19	1,52	76	22,21±0,16	1,41	126	3,1
Длина верхней лопасти C	59	24,46±0,19	1,47	74	28,23±0,17	1,48	108	6,3
Длина нижней лопасти C	59	26,44±0,19	1,45	76	30,78±0,19	1,67	108	1,69
Длина головы	60	24,28±0,13	1,03	77	23,51±0,12	1,06	126	0,93
В п р о ц е н т а х к д л и н е г о л о в ы								
Высота головы	60	65,48±0,51	3,93	77	76,50±0,66	5,79	126	11,9
Ширина головы	44	45,89±0,33	2,18	75	53,19±0,34	2,97	86	9,8
Ширина лба	59	31,88±0,29	2,22	77	36,74±0,24	2,12	126	2,43
Диаметр глаза	60	23,30±0,26	2,06	77	27,40±0,23	2,06	126	1,81
Длина рыла	60	30,00±0,30	2,36	77	25,11±0,25	2,13	126	2,53
Длина нижней челюсти	60	31,63±0,27	2,15	76	31,86±0,23	2,05	126	3,6
Заглазничный отдел	60	44,87±0,31	2,38	77	45,81±0,24	2,17	126	1,8
Высота головы	60	65,48±0,51	3,93	77	76,50±0,66	5,79	126	11,9
Ширина головы	44	45,89±0,33	2,18	75	53,19±0,34	2,97	86	9,8
Ширина лба	59	31,88±0,29	2,22	77	36,74±0,24	2,12	126	2,43
Диаметр глаза	60	23,30±0,26	2,06	77	27,40±0,23	2,06	126	1,81
Длина рыла	60	30,00±0,30	2,36	77	25,11±0,25	2,13	126	2,53
Длина нижней челюсти	60	31,63±0,27	2,15	76	31,86±0,23	2,05	126	3,6
Заглазничный отдел	60	44,87±0,31	2,38	77	45,81±0,24	2,17	126	1,8

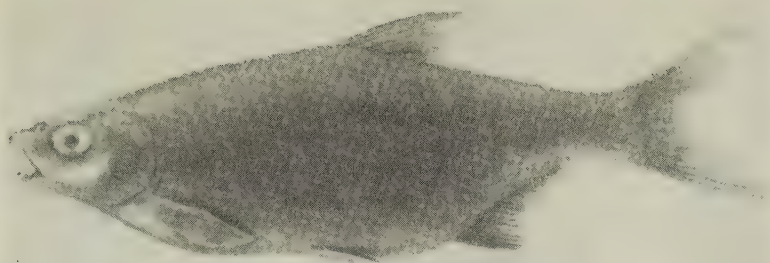


Рис. 1. Рыбец \times густера; ♀ IV—V: Длина (l) 20,5 см, вес 210 г; возраст 3+года; вес половых продуктов 37 г. Нижний Днепр, 30 V 1959 г.

По другим меристическим признакам «густирный рыбец» занимает промежуточное положение с незначительным отклонением к одной из исходных форм. Зубы густирного рыба двурядные, за типичную формулу можно принять 1.5—5.1. Половой диморфизм у «густирного рыба» почти отсутствует, если не считать того, что у самок высота тела несколько больше ($M_{diff} = 3,2$), чем у самцов. Отсутствие полового диморфизма у «густирного рыба» и незначительное его проявление у исходных форм дает нам основание сравнивать пластические признаки всех рассматриваемых форм по общим признакам самцов и самок.

При сравнении пластических признаков головы (табл. 2) обратила на себя внимание длина нижней челюсти «густирного рыба», которая значительно длиннее, чем у исходных форм, являясь новообразованием. Высота головы, ширина головы и лба у гибрида ближе к величинам этих признаков у густеры, а длина рыла и диаметр глаза занимают промежуточное положение.

Сравнение пластических признаков тела «густирного рыба» с признаками исходных форм показало, что гибрид занимает промежуточное положение лишь по двум признакам (по длине основания А и по наибольшей высоте тела, правда, с незначительным влиянием густеры). У «густирного рыба» голова оказалась короче, а расстояние V — А больше, чем у исходных форм, что также является новообразованием. По толщине тела «густирный рыбец» несколько ближе к густере, по всем остальным признакам заметно влияние рыба. При определении возрастного состава выяснилось, что в промысле «густирный рыбец» встречается в возрасте от 2 до 6 лет. Четырехгодовалые рыбы составляют в уловах 43,0%. Во втором и третьем месте соответственно пяти- и трехгодовалые рыбы.

Интересно отметить, что с увеличением длины тела «густирного рыба» от 16 до 24 см коэффициент упитанности аналогично рыбку (⁷), заметно уменьшается, у густеры — наоборот увеличивается.

В связи с тем, что в промысле «густирный рыбец» встречается довольно часто, иногда в значительных количествах, необходимо основательно изучить его биологию и причины, вызывающие случаи регулярно повторяющейся естественной гибридизации рыба и густеры как представителей двух родов сем. Cyprinidae.

Институт гидробиологии
Академии наук УССР

Поступило
14 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. Белинг, «Ласкiрний рибець» з днiпрового пониззя, Науковi записки, 1, 1923.
- ² Л. С. Берг, Рыбы пресных вод и сопредельных стран, ч. 2, Изд. АН СССР, 1949.
- ³ В. Исаченко, Тр. Всеукр. гос. Черноморск.-Азовск. научн. пром. опын. ст., 2, Херсон, 1927.
- ⁴ К. Кесслер, Путешествие с зоологической целью к северному берегу Черного моря и в Крым в 1858 г., Киев, 1861.
- ⁵ М. Ф. Правдин, Руководство по изучению рыб, 3-е изд., Л., 1939.
- ⁶ Л. П. Сабанеев, Рыбы России, 1911, стр. 537.
- ⁷ Н. П. Тарнавский, Студенські наукові праці, Київський держ. унів., Збірн., 20, 1956.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МОРФОЛОГИЯ

И. С. ДАРЕВСКИЙ

**УРОДСТВА ПРИ ПАРТЕНОГЕНЕТИЧЕСКОМ РАЗМНОЖЕНИИ
У СКАЛЬНЫХ ЯЩЕРИЦ *LACERTA SAXICOLA* EVERS-MANN**

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 12 I 1960)

Вызванные нарушениями эмбриогенеза уродства у пресмыкающихся, преимущественно бицефалия и удвоения туловища, описывались неоднократно (¹⁻²⁰) *. Большинство случаев таких уродств известны у змей (⁶⁻²⁰), и лишь единичные наблюдались у ящериц (¹⁻⁵).

Как правило, уродства обнаруживаются у недавно родившихся или вышедших из яиц молодых особей, погибающих затем из-за нежизнеспособности в возрасте от нескольких часов до 2—3 недель. Встречаемость их в природе крайне низка, не превышая, по имеющимся данным, сотых долей процента (¹⁵⁻²⁰).

Многочисленные случаи образования разнообразных уродств наблюдались нами в 1957—1959 гг. при массовой инкубации яиц скальной ящерицы (*Lacerta saxicola* Eversmann), у которой ранее было установлено нормальное партеногенетическое размножение (²¹). Существование уродов констатировалось обычно на заключительной стадии инкубации после того, как из большинства яиц успевали вывести нормальные сеголетки. При искусственном вскрытии оставшихся яиц в большинстве из них обнаружались живые уроды, обычно неспособные самостоятельно освободиться от яйцевой оболочки и обреченные вследствие этого на гибель.

После извлечения из яйца уродливые сеголетки некоторое время оставались живыми и в зависимости от степени уродства погибали в промежутки времени от 1—2 час. до нескольких суток. В отдельных случаях гибель их наступала и на более ранних стадиях инкубации, что устанавливалось при вскрытии преждевременно сморщившихся яиц.

В зависимости от характера и степени развившихся аномалий, полученных уродов можно разделить на четыре (I—IV, см. табл. 1) основные группы.

К I относятся разнообразные деформации головы, и в первую очередь диспропорция и искривление челюстей (рис. 1, 1, 2). Уроды этой группы бывают лишены также одного или обоих глаз. II группу уродов представляют особи, у которых в той или иной степени проявляется тенденция к бицефалии или удвоению туловища (рис. 1, 3—12). Уроды III группы характеризуются полным отсутствием нижней челюсти и языка, что сопровождается характерными изменениями фоллидоза нижней поверхности головы (рис. 1, 13, 14). Наконец, к IV группе относятся специфические уродства, проявляющиеся в незакрытии полости тела и общей диспропорции туловища, сопровождающейся значительными изменениями всего фоллидоза (рис. 1, 15, 16). Особняком стоит случай полной ацефалии, констатированный у 25-дневного эмбриона *L. sax. armeniasa*.

Попадают также уроды, в той или иной степени сочетающие в себе признаки каждой из четырех групп. Большинство развившихся уродов достигают размеров нормальных сеголеток ($L = 23—27$ мм) и лишь погибающие

* Более ранняя литература по уродам у пресмыкающихся приводится в сводке Кунинхем (6) и работе Накамура (7).

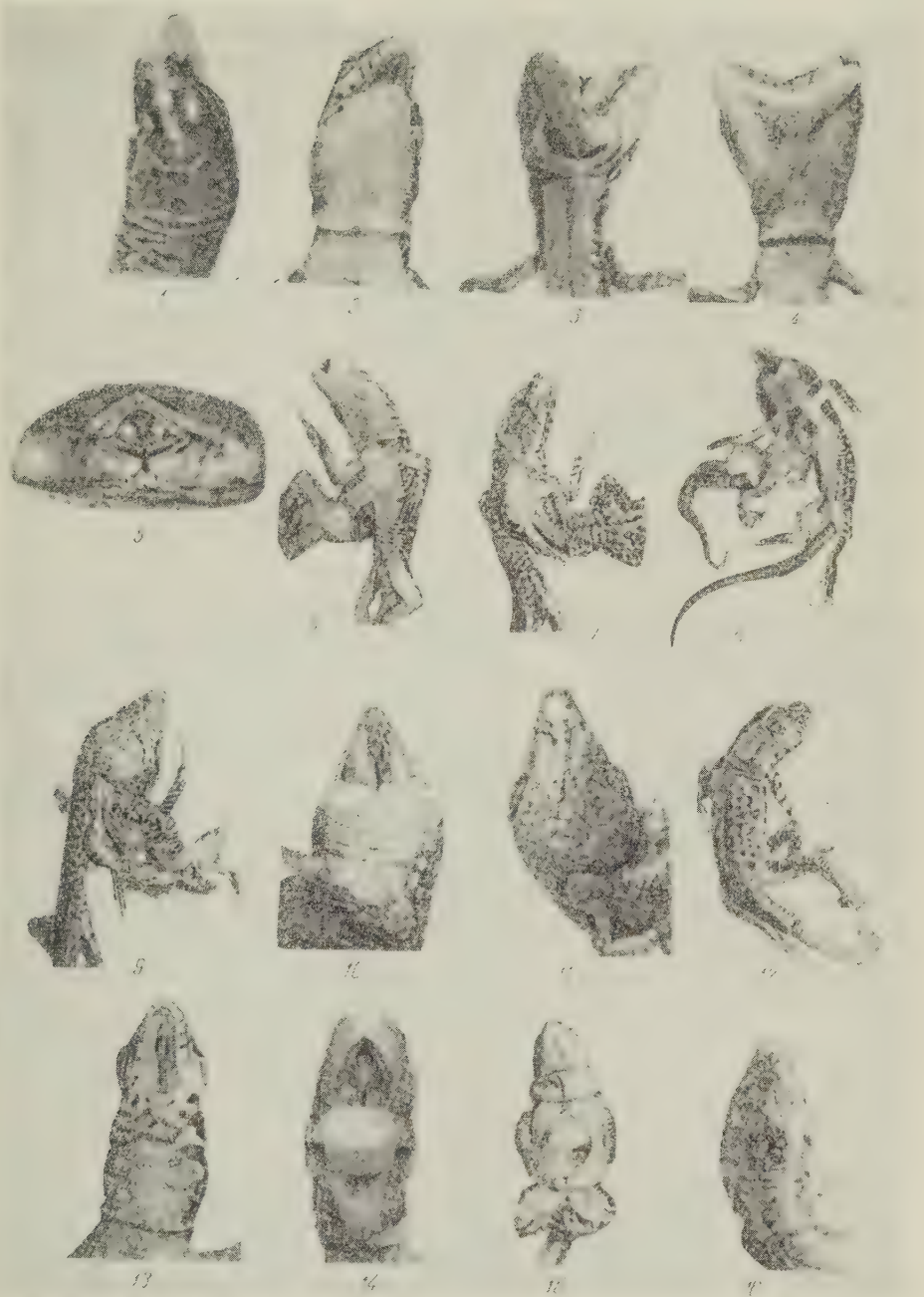


Рис. 1. Характерные уродства, наблюдаемые у скальных ящериц. 1 — общее искривление головы и удлинение нижней челюсти; 2 — укорочение и искривление нижней челюсти; 3—5 — частичное удвоение головы (вид сверху, снизу и з анфас); 6—9 — частичное удвоение туловища при сращении в области груди; 10 — укорочение нижней челюсти на общей голове двух сросшихся особей; 11 — щитки пилеуса, образованного двумя слившимися головами; 12 — частичное удвоение задней части туловища; 13 — отсутствие языка и нижней челюсти, сопровождающееся сильными изменениями фolidоза нижней поверхности головы; 14 — то же у 25-дневного эмбриона; 15 — незакрытие полости тела и общее изменение чешуйчатого покрова; 16 — измельчение щитков пилеуса при общем нарушении чешуйчатого покрова. 1 — *L. sax. defilippii*, 2 — *L. sax. terentjevi*, 3—14 — *L. sax. armeniaca*, 15, 16 — *L. sax. dahli*

на ранних стадиях развития уродливые эмбрионы IV группы бывают значительно меньше ($L = 12-20$ мм).

Частота образования различных типов уродств дана в табл. 1. Не рассматривая специально особенностей анатомического строения всех уродов, мы остановимся здесь лишь на некоторых из них. Наиболее характерными для пресмыкающихся являются двойные уроды, относящиеся ко II группе. Для большинства полученных нами таких уродов характерны два более или менее

Таблица 1

	Число развившихся се-голеток	Число уродов					Процент уродов
		I	II	III	IV	всего	
Партеногенетические:							
L. sax. armeniaca	206	4	5	3	—	22	5,8
L. sax. dahli	104	1	—	—	7	8	7,6
L. sax. rostombekowi	98	1	—	—	4	5	5,1
Обоеполюе:							
L. sax. defilippii	152	2	—	—	—	2	1,3
L. sax. terentjevi	63	1	—	—	—	1	1,5

раздельных туловища, сращенные в области груди (рис. 1, 6, 9). При этом интересно, что если вентральное сращение происходит обычно на уровне 10—16 ряда брюшных щитков, то со стороны спины область соединения простирается далеко вперед, почти достигая головы. Последняя бывает значительно увеличена и образована обычно элементами обеих слившихся голов, что хорошо заметно по фолидозу пилеуса. Наблюдавшееся в этом случае сочетание щитков очень своеобразно. Как видно на рис. 1, 11, общая для обеих особей голова, покрыта в расширенной затылочной области одним межтеменным, двумя затылочными и тремя теменными щитками, из которых средний является общим для правой и левой сторон.

Интересные аномалии обнаруживаются и при частичном разделении голов (рис. 1, 3, 5). Следует отметить, что все известные у ящериц случаи уродства (1-5) относятся именно к последнему типу. Исходя из того, что

Таблица 2

№№ сросшихся уродов	Число чешуй вокруг середины тела		Число бедренных пор	
	у правого	у левого	у правого	у левого
1	41	39	19/17	17/16
2	38	36	16/17	17/18
3	44	42	16/17	17/18
4	41	43	17/16	15/17
5	40	42	15/17	16/17

каждую пару частично сросшихся особей можно рассматривать как своеобразных однойцевых близнецов, интересно было выяснить, насколько они различаются по своему фенотипу. Приводимые в табл. 2 результаты сравнения некоторых важных в систематическом отношении морфологических признаков показывают, что полного сходства фенотипов у двойных уродов не наблюдается, и оба они похожи друг на друга не более, чем обычные партеногенетические сестры. В этой связи следует отметить, что полного сходства не наблюдается также и у полученных нами нормальных раздельных близнецов.

Особый интерес представляют уроды III группы, поскольку подобные аномалии у пресмыкающихся описываются впервые. Как видно на рис. 1, 13, 14, наблюдаемое у них отсутствие языка и нижней челюсти сопровождается своеобразными изменениями фолидоза, причем особенно интересно появление на горле крупного (иногда разделенного) непарного щитка, напоминающего своей величиной и формой преанальный щиток, расположенный впереди клоакальной щели. При этом происходит также частичное перемещение на горло обеих ушных отверстий.

Как видно из табл. 1, образование уродов у партеногенетических и обоеполых форм *Lacerta saxicola* протекает неравномерно, и у первых уродства образуются значительно чаще, чем у вторых. Кроме того, аномалии, развивающиеся у обоеполых форм, относятся только к I группе и выражены сравнительно слабо.

На основании этих данных можно говорить о существовании у ящериц определенной связи между приводящими к образованию уродств нарушениями эмбриогенеза и партеногенетическим способом размножения. Такое заключение тем более вероятно, что подобная зависимость ранее уже была установлена на других животных, в частности у тутового шелкопряда⁽²²⁾ и сахалинской сельди⁽²³⁾. Механизм образования уродств у пресмыкающихся неясен. Точка зрения Хамбургера⁽¹⁰⁾, что уроды возникают в результате механического повреждения или сжатия развивающихся яиц, если и справедлива в отношении обоеполых форм, то никоим образом не объясняет частоту образования уродств при партеногенезе.

Неоднократные повторения некоторых специфических уродств, например, рассмотренной выше полной агнатии, указывает на то, что механизм их образования может действовать по установившейся стандартной схеме.

Зоологический институт
Академии наук АрмССР

Поступило
11 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ I. Geoffroy Saint-Hilaire, Histoire générale et particulière des anomalies de l'organisation chez l'homme et les animaux, 1, Paris, 1837, p. 520. ² Cosmos, 5, sér. 3, 136 (1869). ³ J. A. Pires de Lima, C. R. Ass. Anat., 24, 426 (1929). ⁴ R. A. Willis, J. Anat., 66, 189 (1932). ⁵ L. Glauert, Proc. Royal Zool. Soc. New South Wales, for year 1946—1947, p. 34. ⁶ B. Cunningham, Axial bifurcation in serpents. An historical survey of serpent monsters having part of the axial skeleton duplicated, Durham, 1937. ⁷ K. Nakamura, Mem. College Sci. Kyoto Imp. University, 14, ser. B, 171 (1938). ⁸ W. T. Neill, Copeia, 1941, p. 266. ⁹ A. Prodo, Ciencia, 3, 254 (1946). ¹⁰ V. Hamburger, Ciba Symposia, 9, 666 (1947). ¹¹ J. Abe, Annot. Zool. Japonensis, 25, 69 (1952). ¹² L. D. Brongesma, Proc. Akad. Sci. Amst., 49 (1952). ¹³ J. C. List, P. W. Smith, Am. Midland Nat., 51, 312 (1954). ¹⁴ А. М. Алекперов, Зоол. журн., 33, 716 (1954). ¹⁵ И. П. Сосновский, Д. С. Айзенштадт, Природа, № 3, 119 (1956). ¹⁶ L. Dittrich, Aquar. und Terrar., 1, 338 (1956). ¹⁷ M. Radovanovic, Zool. Anzeiger, 159, 130 (1957). ¹⁸ P. E. P. Deraniyagala, Spolia Zeylonica, 28, 166 (1958). ¹⁹ H. E. Belluomini, Mem. Inst. Butantan, 28, 86 (1958). ²⁰ L. M. Klauber, Rattlesnakes, 1, Univ. Calif. Press, 1956. ²¹ И. С. Даревский, ДАН, 122, 730 (1958). ²² Б. Л. Астауров, Искусственный партеногенез у тутового шелкопряда, М.—Л., 1940. ²³ С. Г. Крыжановский, Вопросы ихтиологии, в. 8, 81 (1955).

Я. Е. ХЕСИН и К. С. БЛИННИКОВ

**ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА ЯДЕР КЛЕТОК ОДНОСЛОЙНЫХ КУЛЬТУР
ТКАНИ ПОЧКИ ОБЕЗЬЯНЫ ПРИ ЗАРАЖЕНИИ ВИРУСОМ В**

(Представлено академиком Н. [Н. Аничковым 11 I 1960])

В течение последних лет рядом исследователей (¹⁻⁵) обнаружена зависимость объема ядер клеток от степени функциональной активности органа: при усилении специфической деятельности органа ядра его клеток несколько увеличиваются, а при угнетении функции, напротив, уменьшаются. Эти закономерности были обобщены Беннингхоффом (¹), выдвинувшим представление о функциональном набухании и сморщивании ядер клеток за счет восприятия или отдачи ими воды при усилении или ослаблении деятельности клеточных элементов органа. По отношению к тканевым культурам концепция Беннингхоффа была развита Бухером (^{6,7}), который показал, что при интенсификации роста тканевых культур, выращиваемых по методу Карреля, ядра и ядрышки клеток несколько увеличиваются в объеме, а при подавлении роста, напротив, уменьшаются.

В результате этих работ стало складываться мнение, что увеличение ядер всегда соответствует усилению функциональной активности клеток и что по среднему объему ядер клеток органа можно во всех или почти во всех случаях судить о степени его функциональной активности (^{4,8}). Между тем, при изучении цитопатогенного действия вируса вакцины на различные тканевые культуры в нашей лаборатории наблюдалось увеличение объема ядер клеток, связанное не с интенсификацией роста, а наоборот — с конечной гибелью зараженных клеток (^{9,10}); мы предложили назвать этот феномен «дезинтегративным набуханием» ядер клеток.

Поскольку вирус вакцины, как известно, вызывает образование специфических включений лишь в цитоплазме (^{11,12}), представлялось интересным сравнить полученные ранее кариометрические данные с кариометрическим анализом цитопатогенного действия вируса В, который вызывает образование характерных включений в ядрах клеток (^{13,14}). Этот вирус был обнаружен в 1933 г., когда из мозга врача, погибшего от восходящего миелита после укуса обезьяны, был выделен вирус, который первоначально рассматривали как разновидность вируса герпеса (¹⁵). В 1934 г. Сэбин и Райт (¹⁶) доказали биологическую самостоятельность этого вируса и назвали его вирусом В.

В качестве объекта исследования мы воспользовались однослойными культурами ткани почки обезьяны *Macacus rhesus*, так как действие вируса В на эту ткань изучено достаточно подробно (^{14,17,18}). Клетки второй генерации культивировались в 0,5% растворе гидролизата лактальбумина в растворе Хэнкса с добавлением 2% телячьей сыворотки. По 8 мл суспензии, содержащей 100 тыс. клеток в 1 мл среды, наливались в чашки Петри, на дно которых были помещены покровные стекла. Через 48 час. культивирования, когда стекла были покрыты сплошным слоем пролиферирующих клеток, среду заменяли на 60 мин. средой того же состава с добавлением $5 \cdot 10^5$ ТЦПД₅₀ вируса В. После экспозиции среду с вирусом сливали и чашки трижды промывали средой № 199 (¹⁹), не содержащей вируса. Дальнейшее культивирование зараженных клеток проводилось в среде № 199. Параллельно с зараженными культурами в строго идентичных условиях культивировались контрольные культуры; в контрольных чашках так же меняли среду, производили промывание и т. п., как и в зараженных, но вирус в среду № 199 не добавлялся. Через сроки 6; 18; 24 и 48 час. после начала опыта стекла одновременно извлекались из зараженных и контрольных чашек, ополаски-

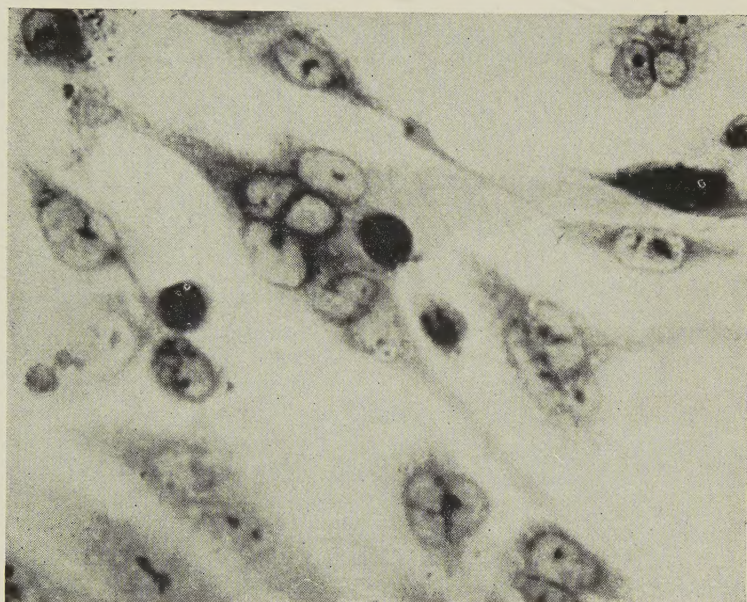


Рис. 1. Характерные для цитопатогенного действия вируса В многоядерные элементы. Хроматин разрушен, ядрышки во многих ядрах отсутствуют. 24 часа после заражения. Окраска гематоксилином и эозином. 800×

вались физиологическим солевым раствором, фиксировались в абсолютном метаноле и окрашивались гематоксилином и эозином. В извлеченной из зараженных чашек питательной среде методом титрования на пробирках с культурой ткани почки обезьяны определялось содержание вируса.

Контуры ядер клеток с помощью рисовального аппарата зарисовывались при увеличении 2130 раз, и площади их измерялись планиметром. В каждом препарате было измерено не менее 100 ядер; поскольку высота ядер в плоских однослойных культурах примерно одинакова, площади ядер принимались соответствующими их объемам. Затем высчитывалась площадь ядер в квадратных микронах, и по методике Гинтцце⁽²⁰⁾ логарифмы полученных величин разбивались на классы с интервалом $0,05 \log V \mu^2$. Полученные данные откладывались на графиках в виде вариационных кривых и обрабатывались с помощью обычных приемов вариационной статистики.

Кариометрическое изучение однослойных культур ткани почки осложняется тем, что здесь обычно присутствуют клетки различной формы и размера⁽²¹⁻²³⁾. В зависимости от количественных соотношений между крупными и мелкими клетками, средний объем ядер и характер вариационных кривых от опыта к опыту могут варьировать, вследствие чего при кариометрических исследованиях приходится обращать особое внимание на однородность исходного материала и на строгую стандартность условий культивирования клеток в опыте и в контроле.

При примененной нами дозе вируса морфологически уловимые изменения клеток отмечаются уже через 18 час. после заражения, причем поражаются все типы клеток, независимо от их внешнего вида и размера. Клетки несколько набухают, цитоплазма их становится мутной и более базофильной, чем в контроле. Хроматин в ядре скапливается в виде крупных глыбок неправильной формы и оттесняется к периферии, под оболочку ядра. Центральная часть ядра постепенно заполняется зернистой оксифильной массой; ядрышки смещаются и постепенно подвергаются лизису. Этот процесс во многом сходен с так называемым «оксифильным набуханием» ядер, описанным при заражении клеток вирусом герпеса человека; Николау⁽²⁴⁾ считает его следствием обильного размножения вируса в кариоплазме. Набухшие ядра в дальнейшем подвергаются фрагментации, и в результате формируются характерные для цитопатогенного действия вируса В крупные многоядерные элементы (рис. 1). Ядра в них лежат плотно сомкнутыми группами; хроматин и зачастую ядрышки отсутствуют; все пространство под оболочкой погибшего ядра заполнено мелкозернистой оксифильной массой, которая местами образует более плотные скопления, так называемые оксифильные внутриядерные включения. Число таких многоядерных элементов с течением времени нарастает, и к 48 час. после заражения одноядерных клеток в культуре не остается. Клетки дегенерируют, отпадают от стекла и подвергаются лизису.

Кариометрические исследования показали, что уже через 6 час. после заражения вирусом В в культурах имеет место увеличение площади ядер на 20—29%. Как и в упомянутых выше опытах с заражением клеток вирусом вакцины^(9, 10), первоначальное увеличение ядер сохраняется, не нарастая, до дегенерации и гибели культуры (табл. 1).

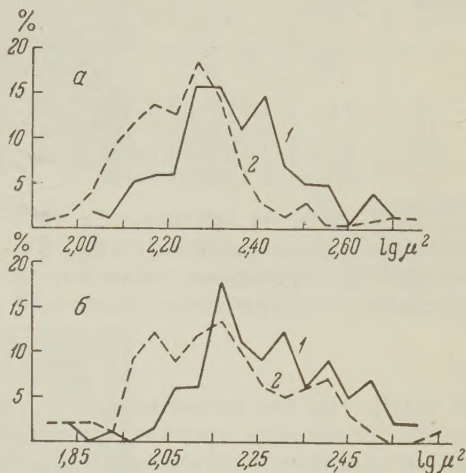


Рис. 2. Вариационные кривые площадей ядер клеток культуры ткани почки обезьяны через 6 час. (а) и 18 час. (б) после заражения вирусом В (1) и соответствующей контрольной культуры (2)

Таблица 1

Срок после зараж. в час.	Титр вируса в \log_{10}	$M_{\text{контр}}$		$M_{\text{зараж}}$		t	% уве-лич.
		в $\log V \mu^2$	в μ^2	в $\log V \mu^2$	в μ^2		
6	0,0	$2,2179 \pm 0,01420$	165,2	$2,3300 \pm 0,01442$	213,8	5,6	28,5
18	1,2	$2,1370 \pm 0,01741$	137,1	$2,2490 \pm 0,01645$	177,4	4,7	29,0
24	3,0	$2,1675 \pm 0,01662$	147,1	$2,2480 \pm 0,01778$	177,0	3,3	20,2
48	4,6	$2,1390 \pm 0,01146$	137,7	Дегенерация клеток		—	—

Для удобства сравнения в табл. 1, помимо выраженных в логарифмах величин среднего арифметического площадей ядер и его квадратической ошибки ($M \pm m$), приведены также выраженные в квадратных микронах величины среднего геометрического площадей ядер. Во всех наблюдениях

$$t = \frac{M - M_{\text{контр}}}{\sqrt{m^2 + m_{\text{контр}}^2}} > 3$$

$P < 0,01$, так что имеющие место сдвиги являются статистически достоверными. Изменения средних площадей ядер сопровождаются соответствующими сдвигами вариационных кривых (рис. 2). Что касается ядер многоядерных элементов, то они оказываются более мелкими, чем ядра одноядерных клеток. Измерение этих ядер через 48 час. после заражения, когда в культурах уже не остается одноядерных клеток, показало, что среднее арифметическое логарифмов площадей ядер равно $1,9810 \pm 0,01290$, что соответствует среднему геометрическому площадей ядер $95,7 \mu^2$.

Относительно того, что лежит в основе дезинтегративного набухания ядер, мы высказали в предыдущей работе ⁽⁹⁾ два предположения: либо укрупнение ядер при заражении клеток вирусами является прямым следствием внедрения вируса внутрь ядер и размножения его в кариоплазме, либо же ядра увеличиваются в результате изменения физико-химических свойств ядерных коллоидов в ответ на контаминацию клеток вирусом. То, что увеличение ядер отмечается вскоре после заражения клеток вирусом и в дальнейшем не нарастает, в то время как содержание вируса в среде с течением времени увеличивается (табл. 1), а также то, что реакция укрупнения ядер (дезинтегративное набухание) наблюдается при заражении вирусами, вызывающими развитие специфических включений как в цитоплазме (вирус вакцины), так и в ядре (вирус В), делает, с нашей точки зрения, более вероятным второе предположение.

Московский научно-исследовательский институт
препаратов против полиомиелита

Поступило
7 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Benninghoff, Anat. Nachr., 1, 50 (1950). ² A. Benninghoff, Zs. Naturforsch., 66, 38 (1951). ³ G. Koch, Zs. Zellforsch., 47, 517 (1958). ⁴ K. Lennert, W. Remmele, Acta haematol., 20, 301 (1958). ⁵ К. Г. Щитков, Арх. патол., 21, 29 (1959). ⁶ O. Bucher, Intern. Rev. of Cytol., 3, 69 (1954). ⁷ O. Bucher, Zs. mikr.-anat. Forsch., 62, 91 (1956). ⁸ L. Rather, Erg. f. allg. Pathol. u. pathol. Anat., 38, 127 (1958). ⁹ Я. Е. Хесин, О. Ф. Сарычева, Ю. Н. Мاستюкова, ДАН, 126, 175 (1959). ¹⁰ Я. Е. Хесин, О. Ф. Сарычева и др., Конфер. по вопр. физиологич. регенерации, Сухуми, 1959, стр. 94. ¹¹ Z. Bobrowa-Pogwit, Z. Chlap et al., Patol. polska, 9, 163 (1958). ¹² В. Д. Соловьев, Ю. Н. Мастюкова, Вопр. вирусол., № 4, 470 (1959). ¹³ A. B. Sabin, Brit. J. Exp. Pathol., 15, 248 (1934). ¹⁴ W. Wood, F. T. Shimada, Canad. J. Public Health, 45, 509 (1954). ¹⁵ G. Gey, M. Holden, J. Infect. Diseases, 53, 287 (1933). ¹⁶ A. B. Sabin, A. Wright, J. Exp. Med., 59, 115 (1934). ¹⁷ F. L. Black, J. L. Melnik, Federat. Proc., 13, 487 (1953). ¹⁸ M. Reissing, J. L. Melnik, J. Exp. Med., 101, 16 (1955). ¹⁹ J. Morgan, H. Morton, R. Parker, Proc. Soc. Exp. Biol. and Med., 73, 1 (1950). ²⁰ E. Hintzsche, Experientia, 1, 1 (1945). ²¹ А. И. Дробышевская, В. П. Михайлов, Ежегодник ИЭМ АМН СССР за 1956 г., 1957, стр. 438. ²² В. Г. Заславский, в кн. Научные основы производства полиомиелитной вакцины, Тр. Инст. препаратов против полиомиелита, 1, 385 (1959). ²³ С. Я. Залкинд, Л. Г. Степанова, Бюлл. эксп. биол. и мед., № 6, 110 (1959). ²⁴ Ст. С. Николау, Усп. совр. биол., 39, 24 (1955).